La resolución de problemas como vehículo para incrementar el aprendizaje del pensamiento aleatorio en los niños de quinto grado

Rubiel González Hurtado

Maestría en Enseñanza de la Matemática

Universidad Tecnológica de Pereira

Pereira, febrero 2017

La resolución de problemas como vehículo para incrementar el aprendizaje del pensamiento aleatorio en los niños de quinto grado

Rubiel González Hurtado

Asesor

Magister: Fernando Mesa

Maestría en Enseñanza de la Matemática

Universidad Tecnológica de Pereira

Pereira, febrero 2017

Nota de aceptación

____

____

____

____

____

Jurado uno

____

Jurado dos

____

Jurado tres

Agradecimientos

A mi asesor, Fernando Mesa, por su apoyo durante este proceso.

A mis profesores de Maestría por darme una nueva visión sobre la educación y de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática.

A mis compañeros de universidad por compartir conmigo esta grata experiencia de formación y permitirme aprender de sus experiencias.

A la Gobernación de Risaralda por confiar en mí y financiar este proyecto de estudios.

A la Institución Agrícola La Florida por abrir sus puertas y permitirme ser parte de su comunidad.

Dedicatoria

A mi familia,
Por su apoyo incondicional en todos los momentos de este proceso. Especialmente a mi padre, que, aunque no esté conmigo en este momento, siempre fue mi aliciente para alcanzar esta meta.

A Luz Ángela,
Que se ha convertido en luz que guía mi camino y mi musa de inspiración.

Tabla de Contenido

Resumen 8

1. Planteamiento del problema 15

2. Marco teórico 19

   2.1. Aprendizaje. 19

   2.2. Teoría de Situaciones Didácticas. 22

   2.3. Ingeniería Didáctica. 27

   2.4. El pensamiento aleatorio. 28

   2.5. Resolución de problemas. 31

3. Estado del arte 33

4. Objetivos 36

   4.1. Objetivo General. 36

   4.2. Objetos Específicos. 36

5. Metodología 37

   5.1. Tipo de Estudio. 37

   5.2. Diseño. 37

   5.3. Participantes. 37

   5.4. Procedimiento. 37

6. Desarrollo de la ingeniería didáctica 38

   6.1. Fase I: Análisis preliminar. 38

      6.1.1. Análisis epistemológico del concepto de probabilidad. 38

      6.1.2. Análisis didáctico. 45

      6.1.3. Análisis cognitivo. 48

   6.2. Fase II: Análisis a priori. 63

      6.2.1. Actividad 1. 63

6.2.2. Actividad 2. 66

6.2.3. Actividad 3. 68

6.3. Fase III: Experimentación. 71

6.3.1. Situación 1: Actividades recreativas. 72

6.3.2. Situación 2: Actividades recreativas 2 84

6.3.3. Situación 3: Probabilidad como razón. 100

6.3.4. Situación 4: Semana de fiestas. 118

6.4. Fase IV: Análisis a posteriori. 127

6.4.1. Categoría 1: Concepto de aleatoriedad. 128

6.4.2. Categoría 2: Lenguaje probabilístico. 130

6.4.3. Categoría 3: Regla de Laplace. 131

7. Conclusiones y recomendaciones 134

8. Referencias bibliográficas 137

9. Anexos 142

Índice de tablas

Tabla 1. *Características de las situaciones didácticas.* 25

Tabla 2. *Número de respuestas de los estudiantes por grupo de preguntas. Pregunta 1. Momento 1. Fase I.* 49

Tabla 3. *Tabla de la pregunta 5. Momento 2. Análisis cognitivo.* 58

Tabla 4. *Categorías para el análisis del concepto de probabilidad.* 62

Tabla 5. *Consolidado respuestas situación 1. Momento 1. Fase III.* 78

Tabla 6. *Justificación de respuestas de los estudiantes. Situación 1. Momento 1. Fase III.* 79

Tabla 7. *Consolidado respuestas. Situación 1. Momento 2. Fase III.* 80

Tabla 8. Justificación de respuestas de los grupos. Situación 1. Momento 2. Fase III. 81

Tabla 9. *Porcentaje de respuesta de los estudiantes. Situación 2. Momento 1. Actividad 1. Fase III.* 86

Tabla 10. *Justificación de respuesta de los estudiantes. Situación 2. Momento 1. Actividad 1. Fase III.* 86

Tabla 11. *Porcentaje de respuesta de los estudiantes. Situación 2. Momento 1. Actividad 2. Fase III.* 87

Tabla 12. *Justificación de respuestas estudiantes. Situación 2. Momento 1. Actividad 2. Fase III.* 87

Tabla 13. *Justificación de respuestas estudiantes. Situación 2. Momento 1. Actividad 3. Fase III.* 89

Tabla 14. *Porcentaje de respuesta de los estudiantes. Situación 2. Momento 2.Actividad 2. Fase III.* 91

Tabla 15. *Justificación de respuestas de los estudiantes. Situación 2. Momento 2. Actividad A. Fase III.* 92

Tabla 16. *Porcentaje de respuesta de los estudiantes. Situación 2. Momento 2. Actividad B. Fase III.* 93

Tabla 17. *Justificación de respuestas de los estudiantes. Situación 2. Momento 2. Actividad B. Fase III.* 93

Tabla 18. *Porcentaje de respuesta de los estudiantes. Situación 2. Momento 2. Actividad C. Fase III.* 95

Tabla 19. *Justificación de respuestas de los estudiantes. Situación 2. Momento 2. Actividad C. Fase III.* 95

Tabla 20. *Porcentaje de respuesta de los estudiantes. Situación 3. Momento 3. Fase III.* 97

Tabla 21. *Justificación de respuestas de los estudiantes. Situación 2. Momento 3. Fase III.* 98

Tabla 22. *Definiciones de los estudiantes concepto de "imposible"* 98

Tabla 23. *Definiciones de los estudiantes concepto de "poco probable"* 99

Tabla 24. *Definiciones de los estudiantes concepto de" igualmente probable"* 99

Tabla 25. *Definiciones de los estudiantes concepto de" muy probable"* 99

Tabla 26. *Definiciones de los estudiantes concepto de "seguro"* 100

Tabla 27. *Justificación de las respuestas de los estudiantes. Situación 3. Momento 4A. Fase III*. 108

Tabla 28. *Justificación 2 de las respuestas de los estudiantes. Situación 3. Momento 4A. Fase III*. 109

Tabla 29. *Justificación de las respuestas de los estudiantes. Situación 3. Momento 4B. Fase III* 111

Tabla 30. *Justificación 2 de las respuestas de los estudiantes. Situación 3. Momento 4B. Fase III* 112

Tabla 31. *Justificación respuestas de los estudiantes. Situación 3. Respuesta Momento 4C. Fase III*. 114

Tabla 32. *Justificación respuestas de los estudiantes. Situación 3. Respuesta Momento 4C. Fase III*. 115

Tabla 33. *Justificación de respuestas de los estudiantes. Situación 3. Momento 4D. Fase III*.................................117

Tabla 34. *Justificación de respuestas de los estudiantes. Situación 3. Momento 4D. Fase III*.................................118

Tabla 35. *Justificación de las respuestas de los estudiantes. Situación 4. Momento 1. Actividad 1. Fase III*..........121

Tabla 36. *Justificación de las respuestas de los estudiantes. Situación 4. Momento 1. Actividad 2. Fase III*..........123

Tabla 37. *Justificación de las respuestas de los estudiantes. Situación 4. Momento 1. Actividad 3. Fase III*..........125

Tabla 38. *Respuesta de los estudiantes. Situación 4. Momento 2. Pregunta 1. Fase III*. 125

Tabla 39. *Respuesta de los estudiantes. Situación 4. Momento 2. Pregunta 2. Fase III*. 126

Tabla 40. *Respuesta de los estudiantes. Situación 4. Momento 2. Pregunta 3. Fase III*. 126

Tabla 41. *Contrastación de categorías para el análisis del concepto de probabilidad*..127

Índice de figuras

Figura 1. Porcentaje de respuesta de la pregunta 1. Momento 1.Análisis cognitivo. 49

Figura 2. Ejemplo 1. ¿Para ti que es azar y que es aleatorio? Momento 1. Análisis cognitivo. 50

Figura 3. Ejemplo 2. ¿Para ti que es azar y que es aleatorio? Momento 1. Análisis cognitivo. 50

Figura 4. Ejemplo 3. ¿Para ti que es azar y que es aleatorio? Momento 1. Análisis cognitivo. 50

Figura 5. Ejemplo 4. ¿Para ti que es azar y que es aleatorio? Momento 1. Análisis cognitivo. 50

Figura 6. Consolidado de respuestas. Pregunta 2. Momento 1. Análisis cognitivo. 51

Figura 7. Ejemplo 1.Experiencias aleatorias y no aleatorias. Momento 1. Análisis cognitivo. 52

Figura 8. Ejemplo 1. Palabra que signifique lo mismo. Momento 2. Análisis cognitivo. 53

Figura 9.Imagen pregunta 2. Momento 2. Fase I. 54

Figura 10. Porcentaje de respuestas. Pregunta 2. Momento 2. Análisis cognitivo. 55

Figura 11.Ejemplo 1. ¿Cuál es la zona más fácil para atrapar un pez? Momento 2. Análisis cognitivo. 55

Figura 12.Consolidado de respuestas. Pregunta 3. Momento 2. Análisis cognitivo. 56

Figura 13. Ejemplo 1.Probabilidad de que sea niño o niña. Momento 2. Análisis cognitivo. 57

Figura 14. Porcentaje de respuestas. Pregunta 4. Momento 2. Análisis cognitivo. 57

Figura 15. Ejemplo 1. Respuesta a la pregunta 4 y 5. Momento 2. Análisis cognitivo. 59

Figura 16. Imagen pregunta 7. Momento 2. Análisis cognitivo. 59

Figura 17. Ejemplo 1. Respuestas momento 3. Análisis cognitivo. 61

Figura 18.Imagen. Juego 1. Actividad 1. Fase II. 64

Figura 19. Ejemplo 1. Clasificación “aleatorio y no aleatorio” (E2). Actividad 1. Fase II 65

Figura 20. Ejemplo 2. Clasificación “aleatorio y no aleatorio” (E7). Actividad 1. Fase II 65

Figura 21.Imagen Actividad 2. Fase II. 66

Figura 22. Imagen 2. Actividad 2. Fase II. 66

Figura 23. Ejemplo 1. Diseño de las ruletas (E2). Actividad 2. Fase II. 67

Figura 24. Ejemplo 2. Diseño de las ruletas (E1). Actividad 2. Fase II. 68

Figura 25. Imagen y cuadro. Actividad 3. Fase II. 68

Figura 26. Ejemplo 1. Probabilidad de cada evento (E2). Actividad 3. Fase II. 69

Figura 27. Ejemplo 2. Probabilidad de cada evento (E4). Actividad 3. Fase II. 70

Figura 28. Ejemplo 3. Probabilidad de cada evento (E1). Actividad 3 Fase II. 70

Figura 29. Imagen. Actividad 1. Momento 1 Situación 1. Fase III...73

Figura 30.Imagen. Actividad 2. Momento 1.cSituación 1.Fase III..73

Figura 31. Ejemplo 1. Lanzamiento dado rojo (E7). Situación 1. Fase III. 74

Figura 32. Ejemplo 2. Lanzamiento dado rojo (E3). Situación 1. Fase III 74

Figura 33. Imagen. Actividad 4. Momento 1.Situación 1. Fase III...74

Figura 34. Ejemplo 1. Lanzamiento dado 10 caras (E2). Situación 1. Fase III...75

Figura 35. Ejemplo 2. Lanzamiento dado 6 caras (E1). Situación 1. Fase III...75

Figura 36. Imagen. Actividad 5. Momento 1. Situación 1. Fase III..75

Figura 37. Ejemplo 1. Ronda (E6). Situación 1. Fase III. 76

Figura 38. Ejemplo 2. Estrategia resolución ronda (E6). Situación 1. Fase III...76

Figura 39. Ejemplo 1. Objetos de una bolsa (E3). Situación 1.Fase III. 77

Figura 40. Ejemplo 1. Objetos de una bolsa 2 (E3). Situación 1. Fase III. 77

Figura 41. Ejemplo 2. Objetos de una bolsa 2 (E5). Situación 1 Fase III. 78

Figura 42. Ejemplo 1. Condición aleatoria. Grupo 2. (E1, E4, E7). Situación 1. Fase III. 80

Figura 43. Ejemplo 1. Eventos aleatorios y no aleatorios (E7). Situación 1. Fase III...82

Figura 44. Porcentaje respuestas. Momento 3. Situación 1. Fase III. 82

Figura 45. Comparación respuestas eventos aleatorios y no aleatorios. Momento 3. Situación 1. Fase III................83

Figura 46. Ejemplo 2. Definición conceptos (E6). Situación 1. Fase III. 83

Figura 47. Figura 47. Ejemplo 1. Definición conceptos (E1). Situación 1. Fase III. 83

Figura 48. Ejemplo 1. Elección de fichas (E1). Situación 2. Fase III. 85

Figura 49. Ejemplo 2. Elección de fichas (E2). Situación 2. Fase III. 85

Figura 50. Ejemplo 1. Elección par o impar (E4).Situación 2. Fase III. 87

Figura 51. Ejemplo 1. Elección color (E3). Situación 2. Fase III. 88

Figura 52. Escala de probabilidad....89

Figura 53. Ejemplo 1. Elección fichas usando la escala de probabilidad (E2). Situación 2. Fase III. 90

Figura 54. Ejemplo 2. Elección fichas usando la escala de probabilidad (E6). Situación 2. Fase III. 91

Figura 55. Ejemplo 1. Elección par o impar usando la escala de probabilidad (E4). Situación 2. Fase III. 92

Figura 56. Ejemplo 1. Elección color usando la escala de probabilidad (E1). Situación 2. Fase III. 94

Figura 57. Ejemplo 2. Elección color usando la escala de probabilidad (E6). 94

Figura 58. Ejemplo 1. Elección de eventos usando la escala de probabilidad (E7). Situación 2 Fase III. 96

Figura 59. Imagen. Momento 1. Situación 4. Fase III. 101

Figura 60. Ejemplo 1. Características dados (E5). Situación 3. Fase III. 101

Figura 61. Ejemplo 2. Características dados (E4). Situación 3. Fase III. 102

Figura 62. Ejemplo 3 Características dados (E2). Situación 3. Fase III. 102

Figura 63. Ejemplo 1. Formas de los dados (E6). Situación 3. Fase III. 103

Figura 64. Ejemplo 2. Caras y números de los dados (E6). Situación 3. Fase III. 103

Figura 65.Imagen. Momento 3. Situación 3. Fase III. 104

Figura 66. Ejemplo 1. Respuesta Momento 3 (E1). Situación 3.Fase III....104

Figura 67. Ejemplo 2. Respuestas Momento 3 (E2). Situación 3. Fase III. 105

Figura 68. Ejemplo 3. Respuestas momento 3 (E3). Situación 3. Fase III. 105

Figura 69. Ejemplo 1. Evento: caída del #5 al lanzar dados (E4) Situación 3. Fase III. 106

Figura 70. Ejemplo 2. Evento: caída del #5 al lanzar dados (E7). Situación 3. Fase III. 107

Figura 71. Ejemplo 1. A. Dados con mayor opción (E4). Situación 3. Fase III. 108

Figura 72. Ejemplo 1. A. Dados con menor opción (E4). Situación 3. Fase III. 109

Figura 73. Ejemplo 1. Evento: caída número par al lanzar dados (E7). Situación 3. Fase III. 109

Figura 74. Comparación respuestas estudiante E3 y E5. Caída número par al lanzar dados. Situación 3. Fase III...110

Figura 75. Ejemplo 1. B. Dados con mayor opción (E7). Situación 3. Fase III..111

Figura 76. Ejemplo 1. B. Dados con menor opción (E7). Situación 3. Fase III..111

Figura 77. Ejemplo 1. Evento: caída múltiplo de 10 al lanzar dados (E8). Situación 3. Fase III. 112

Figura 78. Ejemplo 2. Evento: caída número par al lanzar dados (E1). Situación 3. Fase III. 113

Figura 79. Ejemplo 1. C. Dados con mayor opción (E6). Situación 3. Fase III..114

Figura 80. Ejemplo 1. C. Dados con menor opción (E6). Situación 3. Fase III..115

Figura 81. Ejemplo 1. Evento: caída número terminado en dos al lanzar dados (E3) Situación 3. Fase III. 115

Figura 82. Ejemplo 2. Evento: caída número terminado en dos al lanzar dados (E7) Situación 3. Fase III. 116

Figura 83. Ejemplo 1. D. Dados con mayor opción (E3). Situación 3. Fase III. 116

Figura 84. Ejemplo 1. D. Dados con menor opción (E3). Situación 3. Fase III. 117

Figura 85. Ejemplo 1. Probabilidad esferas (E6). Situación 4. Fase III..119

Figura 86. Ejemplo 2. Probabilidad esferas (E5). Situación 4. Fase III Situación 4. 120

Figura 87. Ejemplo 1. Eventos con mayor probabilidad (E6). Situación 4. Fase III. 120

Figura 88. Ejemplo 2. Eventos con mayor probabilidad con esferas (E5). Situación 4. Fase III..............................120

Figura 89. Imagen. Actividad 2. Momento 1. Situación 4. Fase III..121

Figura 90. Ejemplo 1. Número par o impar (E7). Situación 4. Fase III..122

Figura 91. Ejemplo 1. Eventos con mayor probabilidad con dado 10 caras. (E7).Situación 4. Fase III...................122

Figura 92. Ejemplo 1. Múltiplo de 3, 2 o 4 (E3). Situación 4. Fase III. 123

Figura 93. Ejemplo 2. Múltiplo de 3 o 2 o 4 (E3). Situación 4. Fase III..124

Figura 94. Ejemplo 1. Eventos mayor probabilidad múltiplo de 3 o 2 o 4 (E3).Situación 4. Fase III......................124

Figura 95. Ejemplo 2. Eventos mayor probabilidad múltiplo de 3 o 2 o 4 (E4).Situación 4. Fase III......................124

Figura 96. Ejemplo 1. Contrastación respuesta estudiante E7. Categoría 1. Fase IV. 129

Figura 97. Resultados contrastación categoría 1. Fase IV. 129

Figura 98. Ejemplo 1. Contrastación respuesta estudiante E2. Categoría 2. Fase IV. 131

Figura 99. Ejemplo 1. Contrastación respuesta estudiante E2. Categoría 3. Fase IV 132

Resumen

Este trabajo de investigación tiene como objetivo mejorar los aprendizajes del concepto de probabilidad de los estudiantes de grado quinto a través de la ingeniería didáctica. Este proyecto surge debido a los bajos resultados en las competencias matemáticas de los estudiantes en las pruebas internas y externas, especialmente en el pensamiento aleatorio; por eso es necesario realizar un cambio en las prácticas de aula. Con ayuda de la ingeniería didáctica, se realizó un análisis a priori que dio las pautas necesarias para la construcción y aplicación de una secuencia didáctica para ayudar a mejorar la conceptualización de la probabilidad, y con los resultados a posteriori se hace el análisis del impacto obtenido en los estudiantes con la aplicación de la estrategia didáctica. Los resultados demuestran un mayor nivel de aprendizaje de los estudiantes después de la aplicación de las situaciones didácticas.

Palabras clave*: ingeniería didáctica, probabilidad, lenguaje probabilístico, situaciones didácticas, pensamiento aleatorio.*

Abstract

This research aims to improve the learning of the probability concept in fifth grade students using the didactic engineering. This project arises due to the low results in mathematical competences of students in internal and external tests, especially in stochastic thinking; so it is necessary to make a change in classroom practices. With the help of didactic engineering, the preliminary analysis was performed, which gave the necessary guidelines for the construction and application of a didactic sequence that helped to improve the conceptualization of probability. Finally, the posteriori results allowed the analysis of the impact obtained in the students with the application of the didactic strategy. The results show a higher level of student learning after the application of didactic situations.

Keywords: *Didactic engineering*, *probability*, *Probabilistic language*, *Didactic situations, stochastic thinking.*

1. Planteamiento del problema

En la mayoría de los países del mundo la educación es considerada como un proceso de doble sentido, porque no solo potencia el desarrollo individual, sino que genera avances políticos y económicos en la sociedad. Son muchos los conocimientos que requiere una persona para su desarrollo personal y social, y es bien reconocido que la matemática es uno de ellos.

En la sociedad actual la matemática es considerada como parte esencial de la formación básica, ya que contribuye en el desarrollo del pensamiento y la resolución de problemas, y por lo tanto, a la transformación de los estudiantes en ciudadanos críticos y autónomos en una sociedad democrática avanzada. Por ello, la enseñanza de la matemática y sus procesos de aprendizaje son parte relevante de la educación. La educación en matemática debe permitir que los estudiantes desarrollen conocimientos y procedimientos para comunicar y organizar su pensamiento. Las matemáticas son el lenguaje de la ciencia y ayudan al pensamiento crítico para la toma de decisiones más racionales (Rico, 2006).

En Colombia, el Ministerio de Educación Nacional (MEN), trazó lineamientos de formación de la matemática; sin embargo, aunque estos lineamientos dieron bases teóricas y prácticas para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la escuela, parece que no han impactado las prácticas de aula y no han alcanzado los resultados esperados. Aunque aparentemente los procesos hayan mejorado, todavía hay expertos y maestros que continúan preguntándose ¿cómo lograrlo?

Hoy día se presenta una incongruencia en la que, de un lado, la proliferación de textos especializados de didáctica indicaría que, tanto maestros como estudiantes deberían estar mejorando sus niveles de formación en esta área de conocimiento; pero de otro, la abundancia y uso de pruebas indican resultados negativos y muy alejados de los esperados.

Sin embargo, los intentos locales en las escuelas e instituciones urbanas o rurales persisten. Este es el caso de la Institución Educativa Agrícola la Florida donde a pesar de las problemáticas que existen, se ha reflexionado permanentemente en cómo generar estrategias que atiendan situaciones puntuales de aprendizaje de la matemática.

Dentro de esta institución, ya se han detectado dificultades en diferentes niveles de los procesos de enseñanza y aprendizaje de esta área. Una de estas dificultades es la deficiente formación y conceptualización de la mayoría de los docentes de matemática en primaria quienes desconocen estrategias para realizar transposiciones didácticas pertinentes. Otra de las dificultades identificadas está relacionada con el uso de herramientas y materiales inadecuados o sin un propósito para la enseñanza: como los libros de textos desactualizados y descontextualizados que más que apoyar el aprendizaje de los estudiantes lo que hacen es confundirlo, enredarlo y desorientarlo. Por último, es importante anotar que, dentro del plan de estudios de la institución, no existe una metodología particular para el aprendizaje de la matemática de los estudiantes.

Lo anterior se evidencia en los resultados de las evaluaciones externas (Prueba Saber 3, 5 y 9 - 2016) en donde para grado quinto en el área de matemática, se observa que el 44% de los estudiantes están en nivel insuficiente y el 35% en nivel mínimo. Las pruebas Saber evalúan tres competencias en matemática y, en dos de ellas los estudiantes manifestaron dificultades, “competencia de razonamiento y argumentación” y “competencia de planteamiento y resolución de problemas”. Dentro de cada competencia, las pruebas evalúan además tres componentes (numérico - variacional, geométrico - métrico y aleatorio) e igualmente, los resultados en cada uno de ellos, no son los esperados. En el caso específico del componente aleatorio, que es el componente considerado en este estudio investigativo, aún se identifican muchas dificultades de los estudiantes.

De acuerdo con el ICFES, el componente aleatorio se refiere “a la representación, lectura e interpretación de datos en contexto; el análisis de diversas formas de representación de información numérica, el análisis cualitativo de regularidades y de tendencias, y la formulación de inferencias y argumentos usando medidas de tendencia central y de dispersión; y por el reconocimiento, descripción y análisis de eventos aleatorios” (ICFES, 2016).

El componente aleatorio corresponde según los Estándares Básicos en Competencias, al pensamiento aleatorio.

> El pensamiento aleatorio llamado también probabilístico o estocástico, ayuda a tomar decisiones en situaciones de incertidumbre, de azar, de riesgo o de ambigüedad por falta de información confiable, en las que no es posible predecir con seguridad lo que va a pasar. El pensamiento aleatorio se apoya directamente en conceptos y procedimientos de la teoría de probabilidades y de la estadística inferencial, e indirectamente en la estadística descriptiva y en la combinatoria. Ayuda a buscar soluciones razonables a problemas en los que no hay una solución clara y segura, abordándolos con un espíritu de exploración y de investigación mediante la construcción de modelos de fenómenos físicos, sociales o de juegos de azar y la utilización de estrategias como la exploración de sistemas de datos, la simulación de experimentos y la realización de conteos (MEN, 2016, pp. 64-65).

A pesar de la importancia de este tipo de pensamiento para los estudiantes en su vida cotidiana, tal y como lo muestran los resultados de las pruebas, éste no se ha desarrollado eficientemente en los estudiantes; por lo tanto, tienen dificultades para tomar decisiones razonables ante situaciones inciertas.

Para dar respuesta a esta problemática, se ha planteado el presente trabajo investigativo, que se desarrollará con un grupo de estudiantes de grado quinto de la Institución Agrícola La Florida de Santa Rosa de Cabal. Con este estudio se pretende elevar los niveles de aprendizaje del pensamiento aleatorio a través de la implementación de la metodología de ingeniería didáctica.

El marco teórico seleccionado es entonces la ingeniería didáctica, que corresponde con los planteamientos de Brousseau (1997) sobre la teoría de las situaciones didácticas. Según Márquez (2011) esta teoría permite materializar didácticamente una postura constructivista de la enseñanza de las matemáticas y considerar las situaciones didácticas como escenarios para la enseñanza y el aprendizaje. En una dinámica de clase eficaz, el docente debe reconocer el medio, un contexto próximo (real o imaginario) del estudiante, el saber matemático y en dicho ambiente un problema relativo a dicho contexto. Posteriormente en el desarrollo de la situación, el docente va orientando las acciones del estudiante para que este pueda construir los conocimientos matemáticos que surgen del problema. Para hacer posible una actividad de este tipo, el docente debe diseñar y proponer a sus estudiantes situaciones que ellos puedan vivenciar y en las cuales los conocimientos aparecerán como la solución óptima a los problemas propuestos (Márquez, 2011). Desde este punto de vista, la metodología de la ingeniería didáctica es pertinente porque parte de la organización y articulación de actividades con el objetivo de movilizar el aprendizaje de un concepto teniendo en cuenta la participación activa del estudiante en la construcción del conocimiento.

Cabe aclarar además que la Institución Agrícola La Florida es rural, por lo que requiere que las prácticas de aula sean adecuadas para este contexto. Generalmente, en las instituciones rurales los docentes aún utilizan métodos de enseñanza que no tienen en cuenta las características de estos lugares y los conocimientos previos de los estudiantes. En este sentido, la ingeniería didáctica puede aportar elementos importantes para la construcción de propuestas de enseñanza de la matemática en el área rural.

Como consecuencia de lo anterior y en coherencia con la descripción realizada anteriormente, se ha decidido enfocar el estudio de este proyecto en torno al siguiente planteamiento:

¿Cómo elevar los niveles de aprendizaje del pensamiento aleatorio en los estudiantes de grado quinto a través de la implementación de la ingeniería didáctica?

2. Marco teórico

Para el abordaje de la problemática presentada en torno a las dificultades de aprendizaje de matemáticas en los niños de quinto grado en la Institución Educativa La Florida, y el posible acercamiento a la solución fortaleciendo el pensamiento aleatorio a través de la ingeniería didáctica, se pretende profundizar en conceptos de base como: aprendizaje, teoría de las situaciones didácticas, la ingeniería didáctica y el pensamiento matemático aleatorio, específicamente el concepto de probabilidad; desde las premisas del Ministerio de Educación Nacional, de los Estándares Básicos por Competencia y de los Lineamientos curriculares de matemáticas en correspondencia con los siguientes autores: Guy Brousseau y Carmen Batanero entre otros.

2.1. Aprendizaje.

Para iniciar hay que plantear que el aprendizaje en matemáticas, es tal vez el más estudiado entre los aprendizajes. En matemática, no solo basta con conocer el concepto, sino que es necesario saberlo usar, combinarlo con otros conceptos o con estrategias de resolución de problemas; además, es necesario saber explicarlo a sí mismo y a los demás incluyendo el uso de las transformaciones semióticas que permiten pasar de una representación a otra (Fandiño, 2010).

Durante los últimos años se han desarrollado muchas teorías en didáctica de las matemáticas, una de ellas es formulada por Brousseau y es conocida como la teoría de las situaciones didácticas. En ella, se busca unificar e integrar los aportes de diferentes teorías y autores.

Piaget es uno de los autores retomados por Brousseau. Según Piaget, la construcción de conocimiento depende del nivel cognitivo del sujeto, es decir, se necesita alcanzar cierto desarrollo cognitivo para adquirir ciertos conocimientos. Para él, el sujeto juega un papel activo en la construcción de conocimiento y, por lo tanto, el conocimiento que cada persona adquiere no es una copia exacta de la realidad. De acuerdo a esto, el niño o el estudiante, en el caso de la escuela, no es una “tabula rasa” como afirmaban posiciones anteriores (por ejemplo, el empirismo), pero tampoco nace con unos conocimientos específicos (como lo sostienen las posturas racionalistas). En la postura piagetiana el conocimiento es una construcción resultado de la interacción entre el sujeto que conoce y el objeto por conocer (Piaget, 1964). Con estas ideas básicas Piaget funda las bases del constructivismo y de la llamada epistemología genética. Luego Brousseau (1986), retoma muchos de los planteamientos de Piaget para el desarrollo de su "teoría de las situaciones didácticas", que por ser uno de los marcos teóricos del presente proyecto investigativo, será abordada con mayor profundidad en el apartado siguiente.

Continuando con los planteamientos de Piaget, en cuanto a la interacción del sujeto con el objeto, éste explica además que dicha interacción es recíproca, es decir, el sujeto construye al objeto cuando actúa sobre él, y a su vez, este último transforma al sujeto porque le permite crear nuevas conceptualizaciones. En otras palabras, el sujeto no puede conocer al objeto si no aplica sobre él un conjunto de acciones y, al mismo tiempo el objeto "actúa" sobre el sujeto porque promueve cambios en las representaciones que ha construido sobre éste. Para explicar el desarrollo de las estructuras operatorias o lógicas, Piaget plantea una serie de etapas sucesivas para el desarrollo de las funciones cognitivas que son universales. El desarrollo cognitivo implica un proceso de equilibración que se dan durante cuatro etapas: sensoriomotora, preoperacional, operaciones concretas y operaciones formales (Piaget, 1964).

Los estudios de Piaget han sido de valor teórico para muchas disciplinas, incluida la didáctica de la matemática. Sin embargo, esta teoría presenta algunos aspectos problemáticos que ya han sido descritos por otros teóricos. Según Brousseau (2007) aunque la teoría de Piaget muestra que los niños se adaptan desarrollando nociones matemáticas que no les habían enseñado, para cada noción existe todo un conjunto de problemas y ejercicios que le son específicos, y por ello las investigaciones de Piaget tenían poca oportunidad de aportar información sobre la adquisición de saberes más generales. Otro de los problemas de la teoría de Piaget es desconocer las predisposiciones innatas para procesar la información o el énfasis en el sujeto descuidando la interacción con otros para el aprendizaje.

Este último elemento, la interacción con otros para el aprendizaje, se convierte en el eje central de otra de las grandes teorías, la perspectiva histórico cultural, basada en los planteamientos de Vigotsky.

Para Vigotsky (1978) la naturaleza humana es el resultado de la internalización, socialmente guiada, de la experiencia humana que se transmite de generación en generación. Por esto, Vigotsky resalta la importancia de la interacción con los otros para el desarrollo infantil y, en general, para el aprendizaje. Para este autor, en lo social se construyen explicaciones sobre el mundo y se interiorizan los conocimientos. El desarrollo va de afuera hacia adentro, es decir, de lo interpsicológico a lo intrapsicológico.

Para explicar la transición entre lo interpsicológico y lo intrapsicológico, Vigotsky (1978) incorpora el concepto de "zona de desarrollo próximo". La zona de desarrollo próximo se refiere a la distancia entre el nivel de desarrollo real, es decir, el nivel determinado por la capacidad de realizar una actividad independientemente, y el desarrollo potencial, que se determina a través de la capacidad de resolver un problema con la ayuda de otro.

Aunque la teoría de Vigotsky ha sido reconocida también como una de las más importantes explicaciones sobre los procesos de aprendizaje humano, también ha recibido fuertes críticas por su énfasis en lo social y en privilegiar el lenguaje sobre otros sistemas comunicativos.

Cabe señalar, que en la teoría de las situaciones didácticas propuesta por Brousseau se pueden visualizar algunos elementos relacionados con los planteamientos de Vigotsky, puesto que desde su perspectiva la clase es un espacio de producción de conocimiento matemático en el cual las interacciones sociales son necesarias para la construcción de conceptos.

2.2.Teoría de Situaciones Didácticas.

La teoría de las situaciones didácticas fue propuesta por Brousseau en la década del ochenta para explicar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Según esta teoría, la enseñanza debe pensarse como un proceso centrado en la producción de conocimientos matemáticos dentro de la escuela. Producir un conocimiento involucra crear nuevas relaciones y/o transformar otras. La teoría de las situaciones didáctica permite comprender las interacciones sociales entre los estudiantes, docentes y saberes que se dan en una clase y condicionan lo que los estudiantes aprenden y cómo lo aprenden.

La postura de Brousseau (2007) acerca de la producción de conocimiento retoma algunos de los principios básicos de Piaget; aunque a diferencia de él propone que son los comportamientos de los estudiantes los que revelan el funcionamiento del medio, y que por ello, lo que se necesita es modelizar el medio. Un ejercicio o un problema no pueden considerarse como una sencilla formulación de un saber, sino como un dispositivo, como un medio que "responde al sujeto" siguiendo algunas reglas.

En este sentido, Brousseau define un medio como un subsistema autónomo, antagonista al sujeto. Para enseñar un conocimiento determinado se utilizan medios (textos, materiales, etc). Este autor propone la necesidad de un "medio" pensado y sostenido con una intencionalidad didáctica. Esto es precisamente de lo que se ocupa la ingeniería didáctica, del estudio y la producción de dichos medios (Brousseau, 2007)

De acuerdo con Perrin (2009) el medio material, organizado por el profesor para los estudiantes debe, en la medida de lo posible, ser tal que los conocimientos previos de los alumnos, insuficientes para dar una respuesta óptima al problema, le permitan, sin embargo, reconocer si una solución conviene o no y de interpretar la que puede remitir a sus acciones, es decir, un contrato didáctico propicio al aprendizaje cuya retroalimentación pueda establecerse entre el profesor y los alumnos en torno a este medio. El medio en el cual se plantea un problema será un elemento crucial en la definición de una situación puesto que, el estudiante deberá aplicar algunos conocimientos previos para actuar sobre este medio, pero esos conocimientos pueden ser insuficientes para provocar una respuesta aceptable, más aun, habrá una segunda oportunidad en la que el estudiante deberá modificar sus conocimientos y producir una solución satisfactoria. Además, es necesario tener en cuenta el material que exige dicho medio, puesto que éste debe cumplir con ciertas cualidades acordes a su finalidad.

Teniendo en cuenta la teoría constructivista, Brousseau (1986) plantea que el sujeto construye conocimiento a partir de la interacción con el “medio. En otras palabras, el estudiante aprende adaptándose a un medio lleno de contradicciones, de dificultades, y de desequilibrios. Este conocimiento se manifiesta por respuestas nuevas que el estudiante puede dar. De acuerdo a esto, la teoría de las situaciones didácticas describe el proceso de producción de conocimientos a partir de dos tipos de interacciones básicas: la interacción del estudiante con una problemática y la interacción del docente con el estudiante en relación con la interacción del estudiante con la problemática.

De allí, Brousseau (2007) postula que para todo conocimiento matemático es posible construir una “situación” que puede ser comunicada sin requerir dicho conocimiento y para la cual éste determina la estrategia más adecuada. Una “situación” es un modelo de interacción entre un sujeto y un medio que determina cierto tipo de conocimiento. Esta situación se refiere a todo el entorno del estudiante, incluidos el docente y el sistema educativo.

> Hemos llamado “situación” a un modelo de interacción de un sujeto con cierto medio que determina a un conocimiento dado como el recurso del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable. Algunas de estas “situaciones” requieren de la adquisición “anterior” de todos los conocimientos y esquemas necesarios, pero hay otras que ofrecen una posibilidad al sujeto para construir por sí mismo un conocimiento nuevo en un proceso “genético”. Notemos que la misma palabra “situación” sirve, en su sentido ordinario, para describir tanto al conjunto (no necesariamente determinado) de condiciones que enmarcan una acción, como al modelo teórico y eventualmente formal que sirve para estudiarla (Brousseau, 1999, pp.8).

Ahora bien, la teoría de situaciones didácticas postula que existen dos tipos situaciones: una a-didáctica y otra didáctica.

La teoría de las situaciones didácticas denomina situación a-didáctica a una actividad que produce un aprendizaje por adaptación, y la incluye dentro de una situación didáctica, que es una situación de clase. En otras palabras, en la situación a-didáctica el estudiante sabe que el problema fue elegido para hacer que adquiera un conocimiento nuevo, pero debe saber también que este conocimiento está enteramente justificado por la lógica interna de la situación y que puede construirlo sin tener presentes razones didácticas.

Según D´Amore (2006) en una situación a-didáctica, los estudiantes y el objeto del conocimiento están en juego, pero no el profesor. La situación sugiere exigencias y los estudiantes dan repuestas a ellas. Sin embargo, no hay obligaciones didácticas. La intervención del docente en esta etapa no puede ser solo dar indicaciones sobre cómo llegar a la solución, sino encontrar intervenciones sobre la relación alumno-problema. En las situaciones a-didácticas hay interacción del estudiante con una situación problema que ofrece resistencia y a la que debe enfrentarse con sus propios conocimientos. A través de ese proceso, el estudiante elige alternativas de solución y analiza los resultados de estas elecciones, permitiéndole corregir sus errores y construir, a partir de los resultados obtenidos, nuevos conocimientos. En esta búsqueda de construcción del conocimiento, el estudiante o los estudiantes, requiere reconocer si las estrategias que han llevado a cabo son las más adecuadas o si, por el contrario, no alcanza los resultados esperados.

Como los estudiantes no pueden resolver siempre todas las situaciones a-didácticas que se le presenten, el docente le presenta aquellas que están a su alcance. Luego de que se ha llevado a cabo una situación a-didáctica, se deben plantear situaciones con la intención explícita de enseñar. Esta situación o problema seleccionado por el docente y en donde él mismo se involucra en la interacción del estudiante y el medio es llamada “situación didáctica”.

Según D’Amore (2006) una situación didáctica es un conjunto de relaciones explícita o implícitamente establecidas entre un estudiante o un grupo de estudiantes con algunos elementos del entorno (incluyendo instrumentos o materiales) y con el docente, con el objetivo de permitir a los estudiantes aprender. En la situación didáctica hay interacción docente-medio-alumno con un propósito de aprendizaje.

Dentro de las situaciones didácticas Brousseau (1999) plantea además que existen cuatro tipos de situaciones diferentes: de acción, de formulación, de validación y de institucionalización.

Las situaciones de acción son aquellas en las que hay interacción entre los estudiantes y el mundo físico. Ellos deben tomar las decisiones necesarias para resolver el problema planteado. Por su parte, las situaciones de formulación tienen como objetivo que los estudiantes comuniquen informaciones entre ellos para modificar, precisar y adecuar el lenguaje que utilizan. Entre tanto, las situaciones de validación tratan de convencer a uno a varios interlocutores de la validez de las afirmaciones, para lo cual los estudiantes requieren elaborar pruebas que lo demuestren. Finalmente, las situaciones de institucionalización pretenden que los estudiantes asuman la significación socialmente establecida de un saber (Grupo Crisálida, 2007). En la tabla siguiente se presentan sus características: (Tomado de: Grupo de investigación Crisálida, 2007. pp. 26-27).

Tabla 1. *Características de las situaciones didácticas.*

Teoría de las situaciones didácticas: situación fundamental
Caracterización de las situaciones didácticas de acción: • Permiten que el estudiante produzca una estrategia inicial de solución a la situación fundamental • Permiten que el estudiante ponga en juego su conocimiento previo • Se visualiza en la situación fundamental un dispositivo lúdico como característica esencial • Los conceptos toman significado en el contexto de la situación fundamental • Requieren que el estudiante experimente con la situación conflicto cognitivo • La forma de trabajo en el aula es individual

Caracterización de las situaciones didácticas de formulación y comunicación: • Permiten el intercambio de información sobre la estrategia generada entre los miembros de la clase (el profesor puede ser uno de ellos) • Se generan nuevos conocimientos, razonamientos e ideas para comprender la situación fundamental desde otra perspectiva • Permiten profundizar sobre la estrategia de solución • Permiten la modificación de las estrategias de solución generadas individualmente • Permiten evidenciar conflictos socio cognitivos entre los resolutores que intercambian información sobre la estrategia inicial, así como la generación de nuevas soluciones • La forma de trabajo en el aula es grupal
Caracterización de las situaciones didácticas de validación: • Permiten que el estudiante sustente la nueva estrategia generada como parte de una solución construyendo una prueba o demostración • Permiten la crítica y la reflexión en torno a la situación fundamental • Enfatizan en el trabajo de aula, el debate y la argumentación, como condiciones para la socialización de la solución presentada a otros • Permiten que el estudiante haga aproximaciones a lo "formal" de los conceptos que emergen con la solución a la situación fundamental • Permiten pasar de la estrategia inicial de solución a otra que se considere óptima
Caracterización de las situaciones didácticas de institucionalización: • Permiten la institucionalización del conocimiento mostrando nuevas categorizaciones, generalizaciones, conexiones con otros conceptos quizás distintos • El profesor es quien hace el cierre de la situación fundamental como conocedor experto • Permiten la autorregulación del aprendizaje del estudiante como condición para mirar sus progresos • La forma de trabajo en el aula es individual, grupal y de colectivo de clase

En conclusión, la teoría de las situaciones didácticas, deja claro que la “situación” incluye un problema, un contexto y un medio en el cual se plantea el problema. Por tal motivo, las situaciones de enseñanza deben de tener en cuenta lo anterior para que la situación didáctica en general pueda funcionar y muestre resultados positivos.

2.3. Ingeniería Didáctica.

La búsqueda de las condiciones necesarias para producir un aprendizaje condujo a Brousseau a desarrollar la noción de Ingeniería Didáctica como una metodología de investigación y como un proceso de producción de situaciones didácticas.

Como modelo de investigación la Ingeniería Didáctica surge en los años ochenta como respuesta a las exigencias de asignar una función efectiva a las investigaciones educativas, en particular, frente el requerimiento de que sus producciones sean significativas para la enseñanza y el aprendizaje, y para la necesidad de consolidar una metodología específica para la didáctica de las matemáticas (Calderón y León, 2012).

El interés de la Ingeniería Didáctica es estudiar el problema de la acción y los medios de acción en el sistema educativo. Para Artigue, Gómez y Moreno (1995), la Ingeniería Didáctica se caracteriza por ser un esquema experimental basado en "realizaciones didácticas" en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza.

Una característica fundamental de este tipo de metodología es la confrontación entre los análisis a priori sobre los diseños de actividades de aula y los análisis a posteriori sobre lo que se producen en la implementación de las tareas, como la forma básica de validación de las hipótesis formuladas en la investigación.

Según Artigue et al. (1995) el proceso experimental de la ingeniería didáctica distingue cuatro fases: fase preliminar, fase de análisis a priori, fase de experimentación y fase de análisis posteriori.

En la fase preliminar se pretende profundizar sobre las condiciones epistemológicas, cognitivas y didácticas de lo que se pretende enseñar. Artigue et al. (1995) destaca que los estudios preliminares solo mantienen su calidad de preliminares en su primer nivel de elaboración. Posteriormente van tomando distintos lugares y funciones en la investigación.

La segunda fase, fase de concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas, busca identificar las variables macro y micro didácticas relacionadas con el estudio y el tipo de actividad propuesta a los estudiantes. El análisis a priori, se convierte en un análisis de control de significado que comprende una parte descriptiva y una predictiva que se centran en las características de la situación diseñada (Artigue et al. 1995).

En la fase de experimentación se ejecutan los diseños y se recogen los datos que informan sobre los fenómenos identificados en el análisis a priori.

Finalmente, la fase de análisis a posteriori y evaluación se basa en el conjunto de datos recogidos en la experimentación. El análisis se fundamenta en un análisis de contenido de los datos obtenidos en la implementación, para la confrontación con el análisis a priori.

Como puede observarse, el proceso de la Ingeniería didáctica corresponde a un análisis cualitativo de los resultados a través de la contrastación de los resultados de la fase preliminar y los análisis a posteriori.

2.4. El pensamiento aleatorio.

Actualmente, los currículos de las instituciones educativas tienden a enfatizar en la importancia del desarrollo del pensamiento aleatorio. Este tipo de pensamiento se considera crucial para el avance de la ciencia, la cultura y la toma de decisiones individuales. La teoría de la probabilidad, ha permitido el dominio y el manejo de las situaciones de incertidumbre a las que se enfrentan las personas y las sociedades continuamente. Fenómenos que en un comienzo parecen caóticos, y regido por el azar, son organizados por la estadística mediante leyes, de una manera semejante a cómo actúan las leyes determinísticas. La estadística ha favorecido el manejo de la incertidumbre en ciencias como la biología, la medicina, la economía, la psicología, la antropología, la lingüística, y ha permitido desarrollos al interior de la misma matemática (MEN, 1998).

Por esto, autores como Batanero (2001) proponen que existe una relación entre el desarrollo de un país y su sistema estadístico, puesto que esta información es fundamental para la toma de decisiones. De esta manera, la educación en estadística se convierte en motor de desarrollo individual y social.

Aunque existen diversas definiciones del término estadística, según Batanero (2001) la estadística estudia el comportamiento de los fenómenos llamados de colectivo y está caracterizada por una información, un modo propio de razonamiento y unas previsiones de cara al futuro (Cabriá, 1994).

Aunque es complejo dividir la estadística en partes, clásicamente se ha dividido entre estadística descriptiva y estadística inferencial. La estadística descriptiva tiene como objetivo presentar resúmenes de un conjunto de datos e indicar sus características, mientras que la estadística inferencial estudia los resúmenes de datos con referencia a un modelo de distribución probabilístico o una familia de modelos determinando márgenes de incertidumbre en las estimaciones de los parámetros desconocidos del mismo (Batanero, 2001). Esta división es considerada demasiado simple y hoy han surgido diferentes corrientes de la estadística. Por ejemplo, es común hablar de “análisis de datos”. Aunque este término tiene diferentes significados.

Ahora bien, dentro del campo de la estadística se encuentra el estudio del denominado cálculo de probabilidades. El concepto de probabilidad se refiere a la posibilidad de que un suceso ocurra. La probabilidad se representa con una fracción que indica el cociente entre los casos favorables de que ocurra el suceso y los casos posibles. En la vida cotidiana hay situaciones en las que no se puede reconocer exactamente el resultado, pero sí los resultados que serán posibles, en este caso, se habla de situaciones que dependen del azar. Por ejemplo, en lanzamiento de un dado no se puede saber qué número caerá, pero si se sabe que hay seis posibles resultados. El resultado final dependerá del azar; a este tipo de fenómenos se les conoce como aleatorios. Dentro de los fenómenos aleatorios cada uno de los resultados se denomina como suceso. Un suceso es seguro si ocurre siempre, es imposible si no ocurre nunca y es posible o probable si puede o no ocurrir.

El cálculo de probabilidades se ocupa del estudio de los fenómenos aleatorios. Al inicio de la teoría, con Cardano, se relaciona la aleatoriedad con la equiprobabilidad de los diferentes resultados, es decir, un fenómeno sería aleatorio si todos sus resultados son equiprobables. Fue hasta finales del siglo XVIII y principios del XIX donde se amplía el número de situaciones consideradas aleatorias, incluyendo fenómenos naturales. Paralelamente, se produce un cambio en el concepto de aleatoriedad, que se hace progresivamente más formalizado, introduciendo la idea de "independencia", que se considera imprescindible para asegurar la aleatoriedad de un suceso en experimentos repetidos (Batanero, 2001).

Además de las ideas básicas de aleatoriedad, hay otros conceptos necesarios sobre el cálculo de probabilidades y estadística. Estos conceptos son importantes para la enseñanza de la probabilidad en los niños. Por ejemplo, en el campo de la probabilidad la intuición juega un papel muy importante. Los modelos intuitivos explicatorios de los niños sobre los fenómenos tienen dos funciones: en una edad temprana ayudan a los niños a entender su entorno y los preparan para el conocimiento analítico posterior. Otros conceptos como el de equidistribución (Ley de Laplace) y simetría también son fundamentales. Mientras que la simetría plantea que ninguno de los resultados tiene mayor ventaja que el resto, la equidistribución se refiere a la igualdad de probabilidad.

Piaget e Inhelder (1957), citado por Batanero (2001) y Batanero y Godino (2004), pensaban que los niños no comprenden bien el azar. Para ello, tendrían primero que entender la relación causa y efecto. Por eso, ellos pensaban que no hay una intuición del azar innata en el niño. Sin embargo, esta idea fue rechazada por Fischbein (1975) para quien la *intuición primaria* del azar, esto es la distinción entre fenómenos aleatorios y no aleatorios, aparece antes de los 7 años.

Fischbein (1975) se basa en la conducta de los niños al practicar juegos de azar, ya que, en juegos sencillos, los niños son capaces de elegir la opción de mayor probabilidad. Esta comprensión es gradual y progresiva. En los fenómenos aleatorios los resultados aislados son impredecibles, pero el conjunto de posibilidades puede determinarse mediante un razonamiento combinatorio, de esta manera se vuelve previsible. Cuando se comprende esto aparece la idea de probabilidad, expresada por la razón entre las posibilidades de un caso particular y del conjunto de posibilidades. Esto ocurre en la etapa de las *operaciones formales* de Piaget. Fischbein afirma que la distinción entre el azar y lo deducible no se realiza espontáneamente en esta etapa porque está influenciado por las tradiciones culturales y educativas de la sociedad actual, que orientan el pensamiento hacia explicaciones deterministas. Para enseñar probabilidad lo primero es identificar si los estudiantes pueden diferenciar entre las situaciones aleatorias y no aleatorias (deterministas).

2.5. Resolución de problemas.

La resolución de problemas es considera un parte fundamental en la didáctica de las matemáticas en la actualidad, puesto que permite el desarrollo de múltiples competencias. Por ello, el texto sobre los lineamientos curriculares del MEN (1998) propone que deben integrarse situaciones de resolución de problemas al currículo de matemáticas, planteando actividades relacionadas con la vida cotidiana. Aunque en la literatura existen diferentes acepciones del término “problema”, en general se puede concebir como una actividad matemática que tiene un objetivo claro, pero a la que no se puede acceder fácilmente, sino que genera desequilibrios cognitivos, dudas y/o bloqueos por la situación o el desconocimiento de la forma para llevar a cabo la solución; de manera que se deba percibir como un desafío personal que requiere el uso de conceptos y procesos matemáticos (Blanco, Cárdenas y Caballero, 2015).

Según los lineamientos curriculares del MEN, ser matemáticamente competente implica la capacidad de plantear y resolver problemas de la vida cotidiana utilizando de manera flexible conceptos, procedimientos y diversos lenguajes de las matemáticas. Por ello, este elemento es uno de los cinco procesos generales que se consideraron en la construcción de los lineamientos. Allí se plantea además, que es un proceso presente en todas las actividades curriculares de matemáticas y no una actividad aislada, pudiendo convertirse en el eje organizador del currículo al proponer a los estudiantes la resolución de problemas de la vida cotidiana que les permitan aprendizajes más significativos (MEN, 1998). Por ello, en esta investigación, se adoptan los supuestos sobre la importancia de la resolución de problemas para el aprendizaje de las matemáticas, y se considera este elemento en la formulación de las actividades dentro de las situaciones didácticas. Es decir, se plantearon situaciones didácticas enmarcadas en problemas cotidianos que requerían el conocimiento y uso del concepto de probabilidad.

3. Estado del arte

La necesidad de incrementar el aprendizaje de las matemáticas en el marco de los Lineamientos curriculares, los pensamientos y procesos planteados en los Estándares Básicos de Calidad del Ministerio de Educación Nacional, han permitido el florecimiento de muchos y variados estudios en torno a la aplicación de diferentes métodos, estrategias y acciones para satisfacer dichas necesidades. En el rastreo de los antecedentes y el estado del arte del conocimiento de estos desarrollos, se ha tratado de acceder a la revisión bibliográfica de varios documentos, tesis de grado e informes de avance de conocimientos; estos son algunos ejemplos:

A nivel internacional, se encuentran trabajos como el de Claudia Vásquez (Pontificia Universidad Católica de Chile. Chile) y Ángel Alsina (Universidad de Girona. España) del año 2014. La investigación denominada “Enseñanza de la Probabilidad en Educación Primaria. Un Desafío para la Formación Inicial y Continua del Profesorado”, buscaba aportar evidencias sobre los conocimientos matemáticos y didácticos que deben poner en juego los profesores de educación primaria para la enseñanza de la probabilidad. Para ello, se realizó un análisis exploratorio de referentes curriculares internacionales y nacionales sobre enseñanza y aprendizaje de la probabilidad, así como de algunos modelos sobre el conocimiento didáctico y matemático del profesor. Se concluyó que es necesaria una adecuación o reestructuración de los actuales programas de formación inicial y continua del profesorado de primaria que contemple la mejora de aspectos disciplinares como didácticos pues, en su mayoría, los profesores de primaria cuando se ven enfrentados a la enseñanza de la probabilidad, se limitan a enseñar un conjunto de técnicas y formulas sin mayores interpretaciones que no facilitan la comprensión de la probabilidad y de sus conceptos asociados, mostrando de este modo una debilidad en la comprensión de los contenidos a enseñar y del conocimiento necesario para llevar a cabo el proceso de enseñanza y aprendizaje. Por esta razón, es preciso que dentro de los programas de formación inicial y continua del profesorado se consideren cursos orientados a entregar el conocimiento matemático y didáctico, que permita a los profesores comprender los conocimientos matemáticos que deberán poner en juego a la hora de enseñar probabilidad, además de desarrollar las competencias profesionales necesarias para anticiparse a los posibles errores y dificultades que pueden presentar los estudiantes en su proceso de aprendizaje, y la forma de superar tales dificultades.

De otro lado, Carmen Batanero (2013) con su artículo; “La comprensión de la probabilidad en los niños: ¿qué podemos aprender de la investigación?”, describe los resultados de diversas investigaciones, particularmente por Piaget e Inhelder y Fischbein, con el fin de orientar adecuadamente a los profesores para enseñar la probabilidad a niños en la Educación Primaria.

A nivel nacional, y a modo de ejemplo, se cita el trabajo de Marleny Concepción Castaño Valencia “Diseño de una unidad didáctica para el desarrollo del pensamiento probabilístico que favorezca un aprendizaje significativo en los estudiantes del grado 5°3 de la I.E El Pedregal del municipio de Medellín” (2013), en el cual demuestra aspectos fundamentales que se deben tener en cuenta para el desarrollo del pensamiento probabilístico en los estudiantes del grado quinto. A partir del diseño de una unidad didáctica, teniendo como referente la teoría del aprendizaje significativo y la propuesta metodológica del ciclo didáctico de Jorba y Sanmartí. Con su propuesta busca favorecer la autonomía del estudiante para permitirle construir y aplicar nuevos aprendizajes.

Cabe anotar que son muchos los resultados de otras investigaciones que se consideraron para el planteamiento de este trabajo, pero sólo se citan algunos ejemplos que permitan una visión global sobre lo que se está investigando actualmente en la didáctica de la probabilidad, lo que no excluye la posibilidad de seguir avanzando en la búsqueda y análisis de muchos otros referentes. A quien interese consultar sobre el tema puede revisar además la siguiente bibliografía:

- Garzón, A. y García, M. Diseño de una secuencia de actividades para la enseñanza de la probabilidad simple en estudiantes de sexto grado. Aplicación y validación. *10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.* Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/706/1/diseno.pdf

- Mohamed, N. (2012) *Evaluación del conocimiento de los futuros profesores de educación primaria sobre probabilidad*. (Tesis doctoral). Recuperado de: http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/TESISMOHAMED.pdf

- Lavenant, E. Juegos de azar en la enseñanza de probabilidad: La intuición como base del aprendizaje formal. Recuperado de: http://cimm.ucr.ac.cr/ciaem/memorias/xii_ciaem/160_juegos_azar.pdf

- Ruiz, K. (2013). *Análisis de recursos en internet para la enseñanza de la probabilidad en la educación primaria.* (Tesis de Maestría). Recuperado de: http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/karen.pdf

- Campeón, M. (2016). *Aprendizaje del concepto de función a partir de un proceso de modelación de fenómenos en contexto, mediante una ingeniería didáctica.* Tesis de Maestría. Pereira: UTP

4. Objetivos

4.1.Objetivo General.

Elevar los niveles de aprendizaje del pensamiento aleatorio en los estudiantes de grado quinto a través de la implementación de la ingeniería didáctica.

4.2. Objetos Específicos.

- Indagar acerca de los conocimientos previos y concepciones que tienen los estudiantes sobre el concepto de probabilidad mediante un análisis preliminar que permita elaborar un diagnóstico con los aspectos más relevantes que intervienen en la comprensión del concepto.

- Diseñar situaciones didácticas que faciliten el desarrollo del concepto de probabilidad a los estudiantes de grado quinto con base en los resultados del análisis preliminar.

- Implementar las situaciones didácticas para facilitar el desarrollo del concepto de probabilidad.

- Evaluar y analizar el nivel de comprensión del concepto de probabilidad alcanzado por los estudiantes de grado quinto, por medio de la confrontación del análisis a priori y a posteriori en el marco de una ingeniería didáctica.

5. Metodología

5.1.Tipo de Estudio.

En este estudio se desarrollará una investigación de tipo cualitativo e interpretativo, donde se pretende analizar el fenómeno de aprendizaje de los estudiantes en el campo de las matemáticas fundamentales y en especial en el objeto matemático enmarcado por la parte del pensamiento aleatorio específicamente en el concepto de probabilidad

5.2. Diseño.

Esta investigación tomó como metodología el modelo de la Ingeniería Didáctica. El interés de la Ingeniería Didáctica es estudiar el problema de la acción y los medios de acción en el sistema educativo. Para Artigue et al. (1995), la ingeniería didáctica se caracteriza por ser un esquema experimental basado en "realizaciones didácticas" en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza. Algunas actividades evidencian, además, la resolución de problemas.

5.3. Participantes.

Los participantes de esta investigación fueron 7 estudiantes del grado quinto de básica primaria de la Institución Educativa Agrícola la Florida, sede Antonio Nariño, del municipio de Santa Rosa de Cabal, Risaralda. Este grupo fue seleccionado porque es el grado quinto en donde se inicia a profundizar en el concepto de probabilidad, según los Estándares Básicos de Competencias y los Derechos Básicos de Aprendizaje. El grupo estaba constituido por dos niñas y cinco niños con edades comprendidas entre los 10 y 12 años. Todos residentes del sector rural, con un estrato socioeconómico bajo.

5.4. Procedimiento.

Artigue et al (1995. pp 38-48), identifica las cuatro fases de la ingeniería didáctica así:

- Fase I de análisis preliminar.
- Fase II de diseño y *análisis a priori* de las situaciones didácticas de la ingeniería.
- Fase III de experimentación.
- Fase IV de *análisis a posteriori* y evaluación.

6. Desarrollo de la ingeniería didáctica

6.1. Fase I: Análisis preliminar.

Dentro del análisis preliminar se indaga sobre los aspectos que tiene que ver con las características asociadas a las dimensiones epistemológicas (propias del saber), cognitiva (de las capacidades diferentes de los estudiantes) y didáctica (el funcionamiento de los sistemas de enseñanza en cuanto al concepto). Se pretende en esta fase identificar las restricciones que existan en cada una de las dimensiones (Artigue et al, 1995).

En este trabajo, la fase preliminar fue desarrollada de la siguiente forma:

Primero se realizó el análisis epistemológico del concepto de probabilidad. Para ello, se revisó la bibliografía sobre la evolución del concepto a través de la historia. Después se analizaron las concepciones que tenían los docentes de la institución sobre la enseñanza del concepto de probabilidad, a través de entrevistas a tres profesores de básica primaria que pertenecen actualmente a la institución. Finalmente, se analizaron las concepciones de los estudiantes respecto al aprendizaje del concepto de probabilidad. Esto se hizo con 10 estudiantes del grado sexto pertenecientes a la misma institución.

A continuación, se presentan los resultados de esta primera fase:

6.1.1. Análisis epistemológico del concepto de probabilidad.[1]

A continuación, se presenta el análisis epistemológico del concepto de probabilidad. Dentro de la ingeniería didáctica este análisis es un apoyo, puesto que permite identificar elementos históricos que ayudan a la comprensión del aprendizaje del concepto. Esta información puede

---

[1] El desarrollo del análisis epistemológico se realizó con base en el texto “Historia de la Probabilidad” publicado online por la UNAD (Universidad Nacional Abierta y a Distancia) y el artículo “los inicios de la teoría de la probabilidad” publicado en la Revista SUMA, en junio de 2007.

convertirse en fuente de hipótesis y aportar elementos para el diseño de situaciones didácticas centradas en un objeto matemático que, a su vez, marque etapas de desarrollo en su construcción en los estudiantes (Brousseau, 2007).

Uno de los primeros campos de problemas en donde se visualiza la idea de probabilidad es el que se vincula con los juegos de azar. El concepto de azar es tan antiguo como la civilización misma. El significado del concepto de probabilidad es muy complejo por los diferentes usos que tiene, tanto en el lenguaje común como en el de las ciencias. Sin embargo, el origen de la probabilidad parece encontrarse en los juegos de azar.

Se han encontrado pruebas de la utilización de juegos de azar en yacimientos arqueológicos de las culturas más antiguas (sumeria y asiria). En algunos de estos juegos se tiraban astrágalos o talus sobre una superficie nivelada y podían caer en cuatro posiciones diferentes. En las civilizaciones griega y egipcia también se utilizaban estos juegos. En sus estudios, Herodoto cuenta que en la antigua Libia (alrededor del año 1.500 a.C) para combatir una época de hambre que duró cerca de 18 años, se utilizaba como estrategia jugar durante todo un día para no sentir hambre y, al siguiente, se comía y no se jugaba. De igual forma existen evidencias de un juego muy popular en el antiguo Egipto (1.800 a.C) llamado “perros y chacales”, el cual consistía en un tablero en el que se colocaban unos punzones con cabeza de perro o chacal según lo indicaran las tabas. Este juego se realizaba sin tener en cuenta la equiprobabilidad de los resultados, por lo que no favoreció el avance en el cálculo probabilístico. En Irak, hace más de 4.000 años, se utilizaban dados de cerámica en forma cúbica y que tenían puntos distribuidos de forma diferente a la actual; este es el dado más antiguo del que se tiene registro.

En cuanto al origen de la palabra “azar”, parece provenir de Siria y posiblemente viene de la flor de azahar, que aparece estampada en la mayoría de los dados de la época. Los juegos de azar también fueron importantes en la vida social de Roma, al punto que en las primeras épocas del cristianismo fueron censurados y prohibidos algunos de ellos.

En 1255, en Francia, el rey de la época, Luis XI, también censuró los juegos de azar y la fabricación de dados, poniéndolos en el mismo nivel que la fornicación y las visitas frecuentes a tabernas.

En otros casos el azar fue considerado como “voluntad divina”, puesto que se tomaban decisiones importantes con base en los resultados. Por ejemplo, para elegir a sacerdotes para puestos importantes, se hacían sorteos confiando en que el resultado era decisión de los dioses.

Con el comienzo del Renacimiento en el siglo XV, surge una nueva visión del mundo, esto proporciona el abandono de las explicaciones teológicas y da un gran impulso al estudio de la ciencia. Además, la invención de la imprenta promueve la expansión del conocimiento, lo que ayudó al estudio del cálculo de probabilidades. Los juegos de azar ahora son mirados desde una perspectiva más científica, dado que los jugadores necesitaban descubrir las leyes que regían ese fenómeno y poder predecir con más certeza lo que ocurriría; dando así origen al estudio del cálculo probabilístico.

En este periodo comenzaron a aparecer inquietudes entorno a contabilizar el número de posibles resultados de un dado lanzado varias veces, o problemas más prácticos sobre cómo repartir las ganancias de los jugadores cuando el juego se interrumpe antes de finalizar. Estas inquietudes no surgieron inicialmente en el campo de las matemáticas sino de la necesidad de resolver problemas cotidianos con el fin de ser equitativos en las apuestas y repartos o incluso de conocer las respuestas para obtener ventajas y obtener mayores ganancias respecto a los demás jugadores.

Como recoge J. A. García Cruz, en “Historia de un problema: el reparto de una apuesta” (García, J. A. 2000), una pregunta de un jugador llevó a discusiones de diferentes matemáticos y científicos durante siglos. El Problema de los puntos o del reparto de apuestas fue estudiado por diversos autores desde el Renacimiento.

Este problema fue abordado por Luca Pacioli (1445-1517) quien en 1487 propuso estos dos problemas particulares: un juego en el que el premio es de 22 ducados que consiste en alcanzar

60 puntos se interrumpe cuando un equipo lleva 50 puntos y el otro 30; y tres arqueros que compiten por un premio de 6 ducados lanzan flechas hasta que uno de ellos haga 6 dianas, siendo interrumpidos cuando el primero de ellos lleva 4 dianas, el segundo 3 y el tercero 2. ¿Cómo deben repartirse los premios entre los contendientes? Pacioli propuso que el premio debería ser repartido en función de las victorias obtenidas anteriormente: así, el premio del primer problema se dividía en 60×5/8 ducados para el primer equipo y en 60×3/8 para el segundo; para el problema de los arqueros, el premio se dividía en la proporción 4/9, 3/9 y 2/9. Como más tarde se pondría de manifiesto, esta solución obtenida por Pacioli es incorrecta.

Fue Girolamo Cardano (1501-1576) quien escribió la primera obra importante relacionada con el cálculo de probabilidades en los juegos de azar. Fue en 1565 y se llamaba *Libro de los juegos de azar*. Este libro es un estudio medianamente organizado con la intención de calcular las diferentes posibilidades del lanzamiento de varios dados. A lo largo de todo el texto, Cardano no usa los teoremas de unión e intersección, sino que utiliza dos métodos: recuento de las distintas posibilidades y el concepto de ganancia media. En la resolución de los problemas planteados, trabajó con los conceptos de la definición clásica de la probabilidad, aunque no los definió explícitamente. En concreto, introdujo la idea de asignar una probabilidad p entre 0 y 1 a un suceso cuyo resultado se desconoce, considerando el número total de resultados y el número de resultados favorables, y esbozó de una forma rudimentaria lo que ahora se conoce como la *ley de los grandes números*, al afirmar que, si la probabilidad de un suceso es p, después de un número grande de repeticiones n, lo más razonable es apostar a que ocurrirá alrededor de np veces. Sin embargo, Cardano no alcanzó a reconocer la importancia teórica de estos conceptos, ya que consideraba estas relaciones como meramente aritméticas, más que como una medida de la posibilidad de ocurrencia de un suceso aleatorio.

Además, Cardano se ocupó del problema del reparto de apuestas y en 1539 llegó a la conclusión de que la solución de Pacioli era incorrecta porque al considerar tan sólo el número de juegos ganados por cada equipo, no contaba cuántos juegos debían ganar para hacerse con el premio. Cardano propuso como solución del problema que, si n es el número de juegos totales y *a* y *b* los juegos ganados por cada equipo, el premio debía repartirse de la siguiente manera: $[1+2+\ldots+(n\text{-}b)]$: $[1+2+\ldots(n\text{-}a)]$.

Esta solución es, en general, incorrecta y sólo da resultados válidos en casos particulares.

Niccolo Tartaglia (1499–1557), también intentó resolver este problema y en 1556 publicó un libro en el que descartaba la solución dada por Pacioli y daba su propia solución: si un equipo ha ganado *a* puntos y el otro *b*, se juega a *n* puntos y el premio total es *P*, las ganancias deberían repartirse de la forma: $(P/2)\pm P[(a\text{-}b)/n]$ siendo la cantidad mayor para el equipo que tenga más victorias. Sin embargo, Tartaglia fue consciente de que su solución no era la correcta y en su libro dejaba claro que era buena para impartir justicia y equilibrio a un reparto, pero no era exacta desde el punto de vista matemático.

Además de los anteriores, Galileo Galilei (1564-1642) tuvo interés por algunos problemas relacionados con el azar, incluso escribió un tratado sobre este tema, entre 1613 y 1624, que inicialmente se denominó *Sopre le Scoperte dei dadi* (Sobre los descubrimientos del dado). Sin embargo, la mayor aportación de Galileo a los inicios de la probabilidad fue la invención de su teoría de la medida de errores. Clasificó los errores en dos tipos: “sistemáticos” y “aleatorios”, clasificación que se mantiene aún en la actualidad y estableció cuidadosamente las propiedades de los errores aleatorios. Con esto contribuyó sin saberlo a la creación de ramas fundamentales de la estadística y la probabilidad posterior.

Como se puede apreciar han sido los italianos los primeros en estudiar la teoría de la probabilidad, sin embargo, ha sido en Francia donde se promueve el desarrollo de esta teoría.

En el siglo XVII la sociedad francesa tenía como entretenimiento más frecuente los juegos de azar. Los juegos cada vez más complicados y las apuestas muy elevadas hicieron sentir la necesidad de calcular las probabilidades de los juegos de manera racional. Los trabajos de Pascal (1623-1662) y Fermat (1601-1665) son considerados la base sobre las que se fundamenta la teoría moderna de la probabilidad.

La correspondencia que tuvieron Pascal y Fermat, dio solución al problema planteado por El Caballero de Méré (1607-1684) a Pascal: Cada jugador apuesta 32 “pistols”. Hay dos jugadores A y B y cada etapa del juego da un punto al ganador y 0 al perdedor. Gana el juego el primero en tener 3 puntos. Se supone además que ambos jugadores tienen la misma probabilidad de ganar cada etapa. El juego se interrumpe cuando A cuenta con un punto y B con ninguno. La pregunta es la misma: ¿Cómo repartir la bolsa total de 64 monedas?

El problema no se plantea como un problema de proporciones, si no que se tiene en cuenta los juegos que faltan por realizar para que la apuesta esté completa, de los posibles resultados se toman los favorables para cada jugador y se distribuye justamente la apuesta.

El Caballero de Méré también le planteó a Pascal problemas relacionados con el juego donde se utilizaban más de un dado. Méré había observado la relación de proporcionalidad entre el número de lanzamientos y número de veces que ocurría un suceso. Esta apreciación incurría en un error al no tener en cuenta que estaba analizando una probabilidad compuesta donde distintas probabilidades se deben calcular multiplicativamente.

Pascal y Fermat no dieron a conocer sus resultados por escrito pero el holandés Christian Huygens (1629-1695) publicó en 1657 un breve tratado titulado “*De Ratiocinnis in ludo aleae*” (*sobre los razonamientos relativos a los juegos de dados*) basado en la correspondencia que tenían los creadores de la teoría de probabilidad. Además, el introduce el concepto de esperanza matemática a partir de la noción de juego equitativo.

También se realizaron otros estudios relacionados sobre probabilidad, cuyo objetivo no era el análisis de juegos. En esta línea, el inglés John Graunt (1620-1674) es el padre de la demografía moderna, al crear censos que explicaban el comportamiento de varios problemas de salud pública.

Las ideas de Graunt fueron tomadas por William Petty (1623-1687) y Edmund Halley (1656-1742), quienes respectivamente, elaboraron un análisis comparativo entre la mortalidad de Londres y la de París y una tabla de mortalidad de la ciudad de Breslau (Alemania). En el trabajo de Halley se pueden encontrar las bases de los teoremas de la suma y la multiplicación de probabilidades y de la ley de los Grandes Números, aunque no los enunció explícitamente; sus trabajos tuvieron gran influencia en demografía y en los seguros.

Para esa época se puede considerar que los juegos de azar ya no eran un pasatiempo sino retos intelectuales en los que participaron las mejores mentes científicas del momento.

Jacques Bernouilli (1654-1705) fue unas de esas mentes, quien propuso diversos problemas relacionados con el campo de la probabilidad, colocó las bases de la probabilidad estadística, descomponiendo un suceso en sucesos elementales.

Otros de los teóricos que aportaron al estudio de la probabilidad durante este tiempo (siglos XVII al XIX) fueron:

- P. Rémond de Montmort (1678-1719). Fue el autor de “Essay d’analyse sur les jeux du hazard” (París, 1708), este libro fue la primera contribución teórica relativa al campo de la probabilidad, correspondiente al siglo XVIII
- Daniel Bernoulli (1700-1782) hacia el año 1738 comenzó el estudio de un problema propuesto por Nicolás Bernoulli (1700-1782) veinticinco años antes, y que se hizo célebre con el nombre de *paradoja de San Petersburgo*.
- El francés Abraham de Moivre (1667-1754), refugiado en Londres, publicó en 1711, Transactions un estudio detallado sobre las denominadas leyes del azar. En 1718 incluyó un nuevo tratado, The Doctrine of Chances, con numerosos problemas y aplicaciones sobre dados, juegos, anualidades de vida, etc.
- Thomas Bayes (1702-1761), se enfrentó con éxito al importante problema de «la probabilidad inversa» (esto es, determinar la probabilidad de las causas por los efectos observados).
- G. L. de Buffon (1707-1788), realiza la primera intervención de la variable continua en las cuestiones de probabilidad, lo trata en un célebre problema que se conoce como el problema de la aguja de Bufón (1733).
- Laplace (1749-1827) es quien formula la teoría clásica de la probabilidad. En sus obras compila la resolución de diferentes problemas, como el de puntos, desarrolla el método de

mínimos cuadrados, la probabilidad bayesiana, etc. Sus aportes fueron muy importantes y lo que quedaba por realizar eran labores de ordenación precisión, rigor y crítica.

- Gauss (1777-1855), aplicando sus conocimientos encuentra la órbita del asteroide Ceres. Utilizando el método de los mínimos cuadrados consiguió dar una aproximación cercana a la órbita. Otra gran aportación de este matemático fue la distribución de errores mediante la ley normal.

A finales del siglo XIX y comienzos del siglo XX, el mundo de la probabilidad y del azar estaba muy abonado y gracias a personajes como Borel (1871- 1956), Pearson (1857-1936), Poincaré (1854-1912), Galton (1822-1911), Markov (1856-1922), Tchebycheff (1821-1894) y Kolmogoroff (1903-1987), esta ciencia se fue consolidando de una manera definitiva.

6.1.2. Análisis didáctico.

El objetivo de este análisis es conocer las concepciones que tienen los docentes sobre la enseñanza del concepto de probabilidad. Para ello, se entrevistaron tres docentes de básica primaria de la institución (Anexo 1).

Análisis docente 1.

La docente 1 es licenciada en pedagogía educativa y cuenta con 24 años de experiencia como docente, durante los cuales ha orientado grado quinto aproximadamente 10 años. Su experiencia ha sido siempre en aulas multigrado que siguen el modelo Escuela Nueva.

En sus respuestas se evidencia que tiene un concepto teórico claro sobre el término probabilidad, puesto que manifiesta que es la posibilidad que existe entre varias situaciones que un hecho se produzca. Esto coincide con los planteamientos que propone Batanero (2001) sobre la probabilidad.

Sin embargo, al plantear preguntas sobre la enseñanza del concepto se muestra insegura y no da respuestas claras. Por ejemplo, no identifica las situaciones de aula donde se puede aplicar, no es capaz de enumerar los conceptos previos necesarios para el aprendizaje de la probabilidad y no responde a la pregunta sobre las dificultades para la enseñanza de este concepto.

Esto es apoyado por Batanero (2016) quien reconoce la inseguridad de los docentes al enseñar probabilidad a los estudiantes, por no tener experiencia en este concepto o porque en los planes de área se encuentra en el último periodo del año escolar; aunque ellos reconozcan la importancia del tema. Por ejemplo, al preguntarle a la docente 1: "¿Cree que es importante enseñar estadística y probabilidad en grado quinto? ¿Por qué?"; ella manifiesta que es de mucha importancia porque las matemáticas sirven para resolver problema de la vida cotidiana, aunque no puede señalar con exactitud situaciones específicas. Esto concuerda con diversas investigaciones (Alpízar, Chavarría y Oviedo, 2015) mencionadas por Batanero (2016).

Análisis del docente 2.

La docente 2 es licenciada en educación especial y tiene seis años de experiencia docente, uno trabajando con grado quinto.

Al igual que la docente anterior, tiene un concepto básico sobre la probabilidad. Ella reconoce que este concepto puede ser utilizado en diferentes situaciones de la vida cotidiana como la lotería o el éxito de una cirugía.

Sin embargo, como ocurre en el caso anterior, existen confusiones. En la pregunta sobre los conocimientos previos necesarios para la enseñanza del concepto, se refiere a temáticas muy inespecíficas que podrían ser importantes para el desarrollo de muchos otros conceptos matemáticos, por ejemplo, menciona las operaciones básicas. También hace mención a conceptos que, si bien están relacionados con la estadística, no están relacionados directamente con el concepto de probabilidad.

Desde esta perspectiva, para Vásquez y Alcino (2014) la enseñanza de la probabilidad en la educación primaria representa un verdadero desafío sobre todo para los profesores en ejercicio, puesto que no cuentan con una formación adecuada al respecto; en otras palabras, los docentes no cuentan con los conocimientos fundamentales necesarios para llevar a cabo los procesos de enseñanza y aprendizaje adecuados; lo que les lleva a presentar concepciones erróneas y una ausencia de herramientas matemáticas y didácticas necesarias para alcanzar los objetivos de aprendizaje planteados en clase.

Análisis del docente 3.

Este docente tiene las mismas características de las dos docentes anteriores. Da una definición, pero no muy precisa; además no es claro su conocimiento sobre la didáctica de la probabilidad porque no da información clara sobre cómo enseñarla. Por ejemplo, no tiene en cuenta que el primer paso para empezar a enseñarla es asegurarse que los estudiantes pueden diferenciar entre situaciones aleatorias y deterministas (Batanero, 2001; Batanero y Godino, 2004).

Es necesario tener en cuenta que para iniciar el proceso de enseñanza de la probabilidad es importante el desarrollo informal de la intuición y el planteamiento de actividades a partir de situaciones cotidianas en un contexto cercano para los estudiantes:

- “Proporcionar una amplia variedad de experiencias que permitan observar los fenómenos aleatorios y diferenciarlos de los deterministas.

- Estimular la expresión de predicciones sobre el comportamiento de estos fenómenos y los resultados, así como su probabilidad.

- Organizar la recogida de datos de experimentación de forma que los alumnos tengan posibilidad de contrastar sus predicciones con los resultados producidos y revisar sus creencias en función de los resultados.

- Resaltar el carácter imprevisible de cada resultado aislado, así como la variabilidad de las pequeñas muestras, mediante la comparación de resultados de cada niño o por parejas.

- Ayudar a apreciar el fenómeno de la convergencia mediante la acumulación de resultados de toda la clase y comparar la fiabilidad de pequeñas y grandes muestras" (Batanero y Godino, 2004).

Como conclusión del análisis didáctico, en los tres casos los docentes evidencian falencias en los conocimientos sobre el concepto de probabilidad y su enseñanza. Estas deficiencias pueden deberse a la falta de formación sobre el tema. Sin una adecuada formación, muchos docentes deben confiar en sus juicios y concepciones, lo que genera en muchas ocasiones conceptos erróneos (Azcárate, 1995; Cardeñoso, 2001; Mohamed, 2012; Contreras, 2011; Arteaga, 2011; Ortiz, Mohamed, Batanero, Serrano y Rodríguez, 2006).

6.1.3. Análisis cognitivo.

Con el objetivo de realizar el análisis cognitivo del concepto de probabilidad, se presentó a 10 estudiantes de grado sexto de la institución una tarea relacionada con el tema, donde se buscaba indagar sobre los conocimientos que deberían haber adquirido durante la básica primaria.

Descripción de la tarea.

La tarea se dividió en tres momentos: el primero era para identificar los conceptos de "azar" y de "aleatorio" que poseían los estudiantes; esto porque Batanero y Godino (2004) consideran que el primer paso para enseñar probabilidad es que los estudiantes sean capaces de diferenciar entre situaciones aleatorias y deterministas. El segundo momento, denominado "seguro e imposible" pretendía que hicieran un uso correcto del lenguaje probabilístico, incluyendo términos como "imposible", "poco probable", "igualmente probable", "muy probable" y "seguro", que identificaran sucesos aleatorios y tomaran decisiones a partir de la información dada. Las preguntas de este momento, se basaron en el libro "Didáctica de la Matemática para el Maestro-Manual del Estudiante" de Batanero y Godino (2004), de los estudios de Green (1982) y además de algunas pruebas Saber. Finalmente, en el tercer momento, se buscaba que los estudiantes representaran la probabilidad con una fracción que indica el cociente entre los casos favorables de que ocurra el suceso y los casos posibles (Batanero, 2001) (Anexo 2).

Momento 1: Azar y lenguaje.

En este primer momento se presentaron a los estudiantes tres preguntas: una sobre su concepto de azar y de aleatorio, otra en la que debían indicar cuáles experiencias consideraban aleatorias y cuáles no, justificando su respuesta; en la tercera pregunta debían justificar si estaban de acuerdo o no con algunas afirmaciones. Estos son los resultados del análisis de las preguntas:

Pregunta 1: ¿Para ti que es el azar y que es aleatorio?

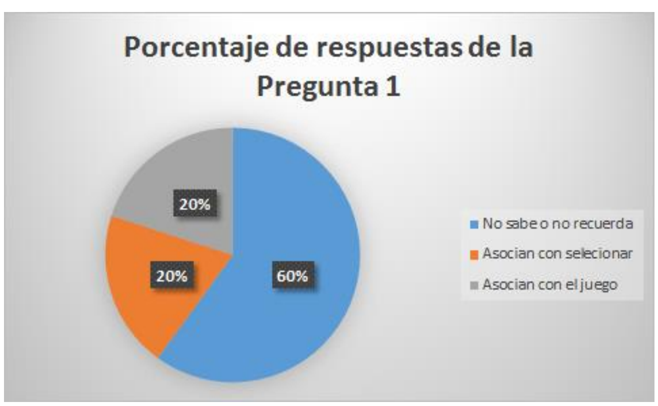
Las respuestas de los estudiantes se dividen en tres grupos: no sabe/no recuerda, que corresponde a los estudiantes que afirman no recordar el tema o no haberlo visto. El otro grupo se asocia con los estudiantes que relacionan los conceptos de azar y aleatorio con la selección de un objeto (asocian con seleccionar); el último agrupa a los estudiantes que relacionaron los conceptos con los juegos (asocian con el juego). La tabla 2 presenta el número de estudiantes en cada grupo de respuestas.

Tabla 2. ***Número de respuestas de los estudiantes por grupo de preguntas. Pregunta 1. Momento 1. Fase I.***

Pregunta 1 ¿Para ti que es azar y que es aleatorio?			
Grupo	No sabe o no recuerda	Asocian con seleccionar	Asocian con el juego
Estudiantes	6	2	2

De acuerdo a la tabla, los porcentajes serían los siguientes:

Figura 1. Porcentaje de respuesta de la pregunta 1. Momento 1.Análisis cognitivo.



En estas respuestas se puede evidenciar que los estudiantes aún no han construido los conceptos de azar y aleatorio y no pueden establecer relaciones entre ellos; a pesar de que estos conceptos están en el plan de estudios del grado anterior.

La mayoría (60%) de los estudiantes afirma no conocer del tema o no recordarlo. Mientras que el 20 % de ellos asocian los conceptos de azar y aleatorio con la elección de algo; esto parece indicar que tienen alguna referencia sobre los conceptos, pero ésta es todavía muy general y ambigua, como se aprecia a continuación:

Figura 2. Ejemplo 1. ¿Para ti que es azar y que es aleatorio? Momento 1. Análisis cognitivo.

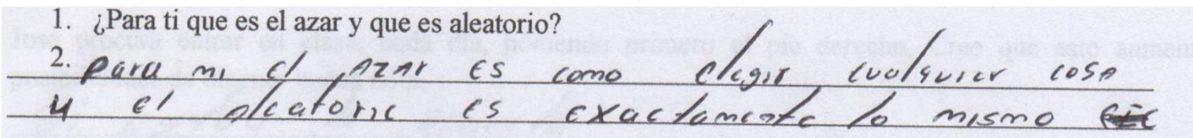
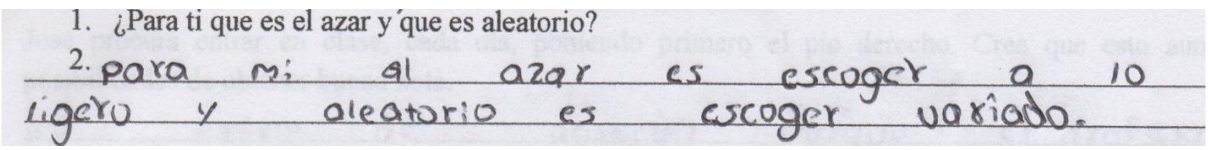

1. ¿Para ti que es el azar y que es aleatorio?
2. para mi el azar es como elegir cuolquier cosa y el aleatorio es exactamente lo mismo

Figura 3. Ejemplo 2. ¿Para ti que es azar y que es aleatorio? Momento 1. Análisis cognitivo.


1. ¿Para ti que es el azar y ´que es aleatorio?
2. para mi al azar es escoger a lo ligero y aleatorio es escoger variado.

Por su parte, el otro 20% de los estudiantes asocian los conceptos de azar y de aleatorio con el juego. Como se aprecia en las imágenes siguientes:

Figura 4. Ejemplo 3. ¿Para ti que es azar y que es aleatorio? Momento 1. Análisis cognitivo.

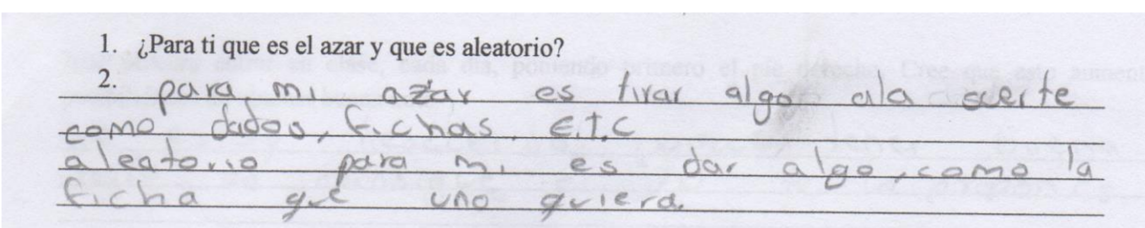
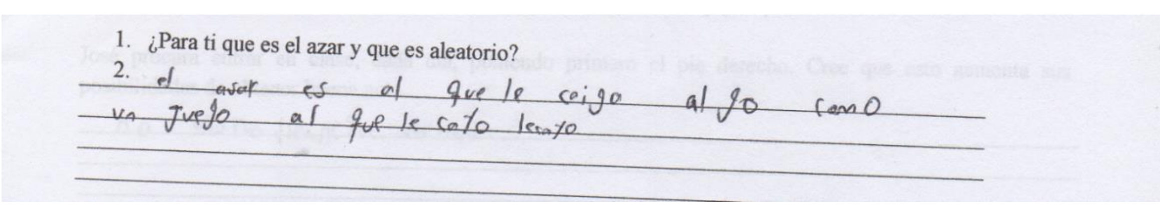

1. ¿Para ti que es el azar y que es aleatorio?
2. para mi azar es tirar algo a la suerte como dados, fichas, E.T.C aleatorio para mi es dar algo, como la ficha que uno quiera.

Figura 5. Ejemplo 4. ¿Para ti que es azar y que es aleatorio? Momento 1. Análisis cognitivo.


1. ¿Para ti que es el azar y que es aleatorio?
2. el azar es al que le coijo al jo como un juego al que le cato lecato

Cabe mencionar que, según el análisis epistemológico, uno de los primeros campos donde se desarrolla el concepto de probabilidad es precisamente en las situaciones de juego; por lo que este tipo de respuesta si bien no demuestran una construcción clara de los conceptos, indica que existen ya en los niños unas ideas previas sobre ellos.

Pregunta 2: Indica cuáles de las siguientes experiencias se consideran como aleatorias y cuáles no y porque:

2A. Tirar un dado y observar si es un número par.

2B. Observar si en las próximas 24 horas sale el sol.

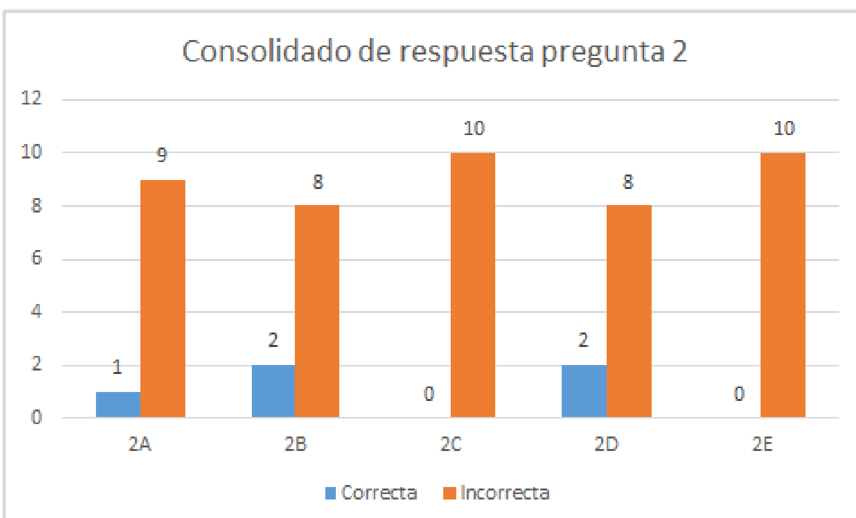
2C. Poner agua a congelar en el refrigerador y observar si se congela.

2D. Lanzar un tiro a una canasta de baloncesto y observar si el balón entra.

2E. Dejar caer un huevo desde un tercer piso y observar si se rompe al chocar con el suelo.

Las respuestas de los estudiantes a esta pregunta permiten afirmar que no diferencian entre los eventos aleatorios de los no aleatorios (deterministas), tal como lo muestra la figura 6.

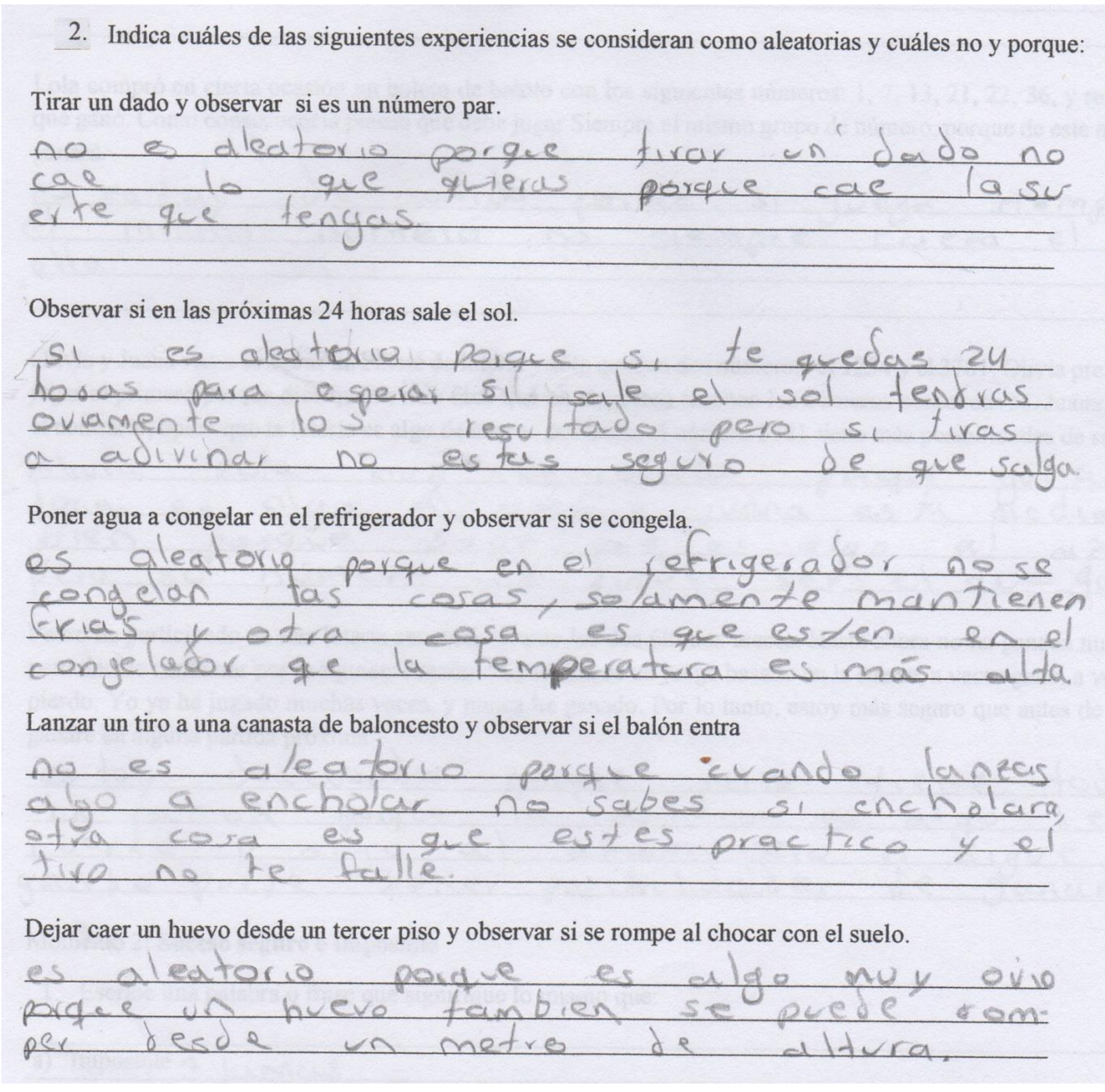
Figura 6. Consolidado de respuestas. Pregunta 2. Momento 1. Análisis cognitivo.



,

Por otro lado, cuando se les pide justificar su respuesta algunos estudiantes tienen una confusión entre los eventos aleatorios y no aleatorios, porque al explicar las razones por las cuales el evento no es aleatorio aluden a expresiones relacionadas con la suerte. O cuando un evento es aleatorio definen que la respuesta es obvia porque es algo que va a pasar. Este es el ejemplo:

Figura 7. Ejemplo 1.Experiencias aleatorias y no aleatorias. Momento 1. Análisis cognitivo.



2. Indica cuáles de las siguientes experiencias se consideran como aleatorias y cuáles no y porque:

Tirar un dado y observar si es un número par.

no es aleatorio porque tirar un dado no cae lo que quieras porque cae la suerte que tengas.

Observar si en las próximas 24 horas sale el sol.

si es aleatorio porque si te quedas 24 horas para esperar si sale el sol tendras ovamente los resultado pero si tiras a adivinar no estas seguro de que salga.

Poner agua a congelar en el refrigerador y observar si se congela.

es aleatorio porque en el refrigerador no se congelan las cosas, solamente mantienen frias y otra cosa es que esten en el congelador que la temperatura es más alta

Lanzar un tiro a una canasta de baloncesto y observar si el balón entra

no es aleatorio porque cuando lanzas algo a encholar no sabes si encholara, otra cosa es que estes practico y el tiro no te falle.

Dejar caer un huevo desde un tercer piso y observar si se rompe al chocar con el suelo.

es aleatorio porque es algo muy ovio porque un huevo tambien se puede romper desde un metro de altura.

Pregunta 3.

A esta pregunta no se le realizó el análisis porque los estudiantes no dieron respuestas que permitieran presentar resultados concluyentes.

En conclusión, los resultados de esta este primer momento demuestran que aún los estudiantes de grado sexto (entre los 11 y 13 años) no tienen desarrollado un concepto claro sobre aleatoriedad. Hay que tener en cuenta que este concepto es el primero que se debe abordar en la enseñanza de la probabilidad (Batanero y Godino, 2004; Batanero, 2016; Piaget e Inhelder, 1951; Fischbein, 1975).

Momento 2: Seguro e imposible.

En este momento se hicieron a los estudiantes siete preguntas para que identificaran sucesos aleatorios y tomaran decisiones a partir de la información dada.

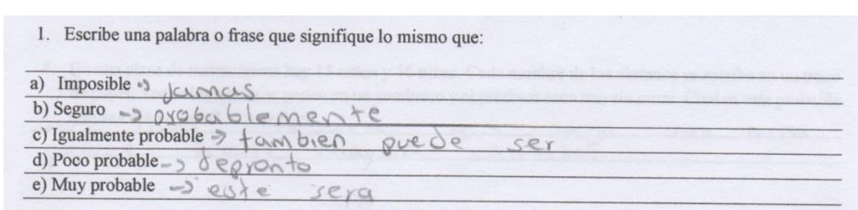
Pregunta 1.

La primera pregunta fue tomada del estudio de Green (1982) quien realizó uno de los estudios más completos de evaluación de la comprensión de la idea de probabilidad en los niños. La pregunta pedía a los estudiantes escribir una palabra o frase que significara lo mismo que otra.

De acuerdo al análisis de las respuestas, en esta pregunta los estudiantes consideran que "imposible" es un término que está relacionado con la palabra "nunca". Otro la relacionó con "jamás" y "difícil", mientras que otro estudiante afirmó no ser capaz de realizar la actividad; los demás colocaron las palabras que se les habían dado en desorden o hicieron frases utilizando las mismas palabras.

En las demás respuestas el resultado fue muy similar, la mayoría de los estudiantes no demostró tener buen uso de este lenguaje o por lo menos desconocer palabras equivalentes. Las respuestas coinciden con el nivel de dificultad planteado por Batanero y Godino (2004) "Este es un ítem de lenguaje y el orden de dificultad es el siguiente: a) b) d) e) c) para los niños de 11-12 años". La respuesta más acertada fue:

Figura 8. Ejemplo 1. Palabra que signifique lo mismo. Momento 2. Análisis cognitivo.



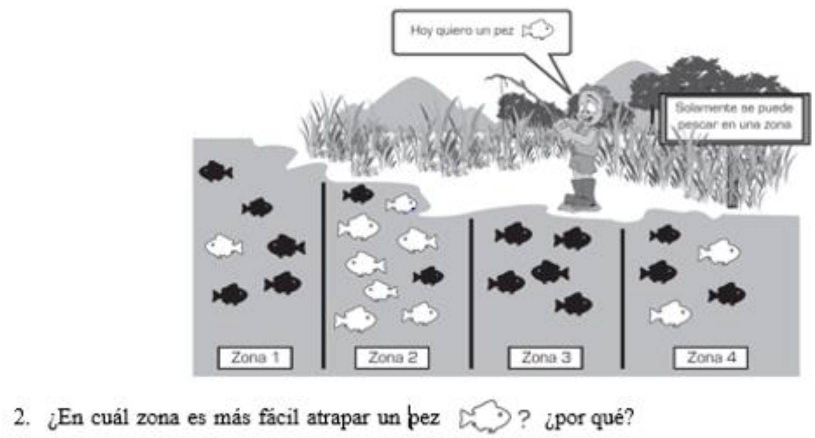
1. Escribe una palabra o frase que signifique lo mismo que:

a) Imposible → jamas
b) Seguro → probablemente
c) Igualmente probable → tambien puede ser
d) Poco probable → depronto
e) Muy probable → este sera

Pregunta 2.

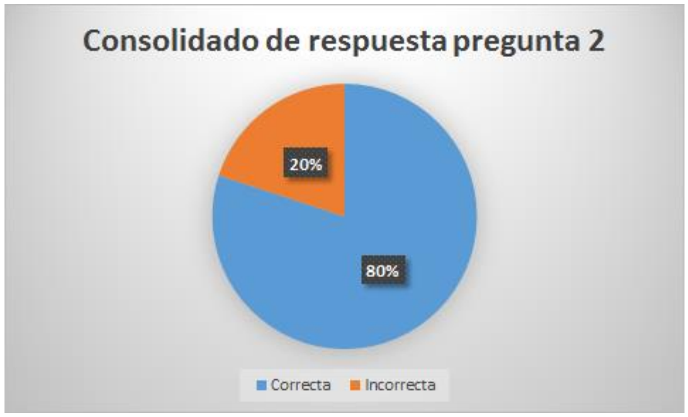
Esta pregunta es tomada de la cartilla prueba saber de grado tercero año 2015 pregunta 35, con la que se quiso saber si los estudiantes establecen conjeturas acerca de la posibilidad de ocurrencia de eventos.

Figura 9.Imagen pregunta 2. Momento 2. Fase I.



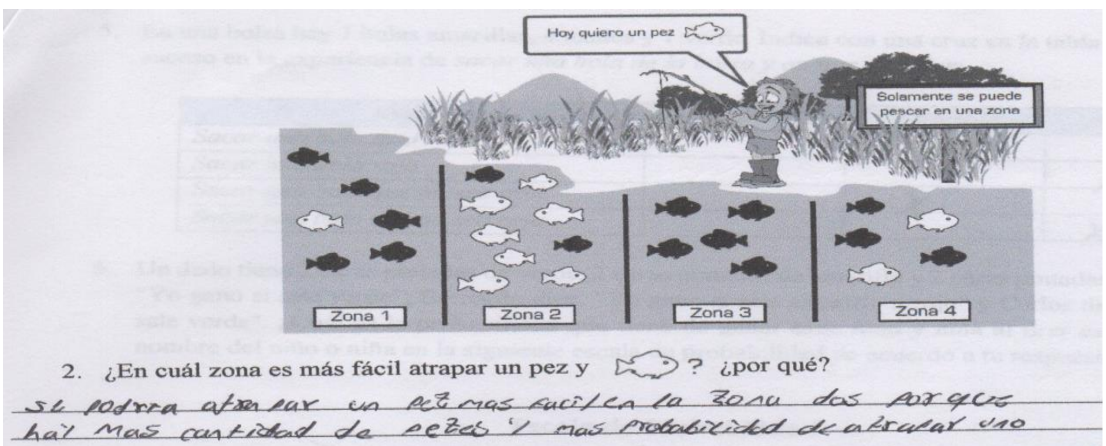
De acuerdo al análisis, el 80% de los estudiantes contestó correctamente la pregunta y justifican su respuesta con la cantidad de peces blancos y negros, el 20% concuerda que es más fácil en la zona 1 porque solo hay un pez blanco, en ambos casos están eligiendo la zona donde la diferencia entre casos favorables y desfavorables sea mayor. Estos resultados concuerdan con los planteados por otras investigaciones sobre las estrategias que siguen los niños al comparar probabilidades. Según Cañizares (1997) citado por Batanero (2013), entre los 8 y los 11 años los niños usan como estrategia elegir la caja donde la diferencia entre casos favorables y desfavorables sea mayor, teniendo en cuenta todos los datos, pero no usan proporciones. En la figura 10 se presentan los porcentajes de respuesta a la pregunta.

Figura 10. Porcentaje de respuestas. Pregunta 2. Momento 2. Análisis cognitivo.



A modo de ilustración, se presenta a continuación una de las respuestas de los estudiantes:

Figura 11.Ejemplo 1. ¿Cuál es la zona más fácil para atrapar un pez? Momento 2. Análisis cognitivo.



Pregunta 3.

La pregunta 3 es una adaptación de Fischbein, Nello y Marino (1991) citada por Cañizares (1997), donde se estudian el papel que tiene para los alumnos el orden en que se generan los diversos resultados que conforman un mismo suceso compuesto:

Responda las siguientes preguntas:

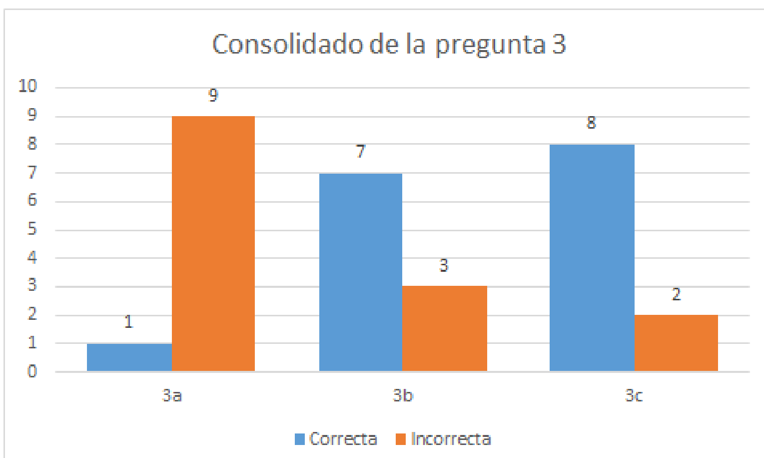
a) Cuando se lanza un dado, ¿qué número o números son más difíciles de obtener? ¿o son todos iguales?

b) Al lanzar dos dados, ¿qué es más probable obtener, 5 en uno y 6 en otro, o 6 en ambos dados?

d) Al lanzar dos dados, ¿qué es más probable, obtener el mismo número en los dos, o diferentes números?

Con respecto a la pregunta 3a se observa claramente que los estudiantes no reconocen que al lanzar un dado los resultados son equiprobables; solo un estudiante fue capaz de evidenciar esta característica. En la pregunta 3b el 70% de los estudiantes reconocen que tiene más opciones sacar 5 en un dado y 6 en el otro, al indagar sobre esta respuesta ellos manifiestan que es porque tiene más opción; el 30 % manifiestan diferentes respuestas como que cae más 6 en ambas caras por suerte. En las respuestas de la 3c, el 80% está de acuerdo que al lanzar dos dados es más probable que salgan diferentes números, dado que cuando ellos han jugado con dados los pares son difíciles de sacar; el 20% dice que el mismo número, justificando de nuevo con la suerte. La figura 12 representa los resultados de respuestas correctas e incorrectas.

Figura 12.Consolidado de respuestas. Pregunta 3. Momento 2. Análisis cognitivo.



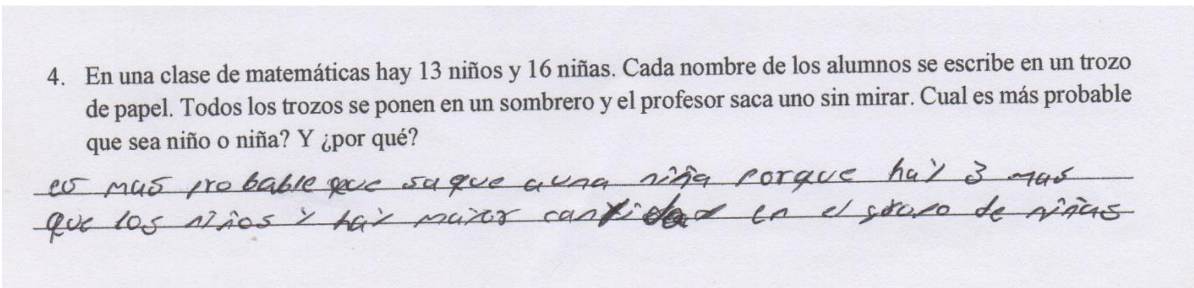
Pregunta 4.

La pregunta 4 fue tomada de Green (1982) citado por Batanero y Godino (2004), en esta pregunta se busca identificar el razonamiento probabilístico.

“En una clase de matemáticas hay 13 niños y 16 niñas. Cada nombre de los alumnos se escribe en un trozo de papel. Todos los trozos se ponen en un sombrero y el profesor saca uno sin mirar. Cuál es más probable, ¿qué sea niño o niña? Y ¿por qué?”

Este es un ejemplo de las respuestas de los estudiantes a esta pregunta:

Figura 13. Ejemplo 1.Probabilidad de que sea niño o niña. Momento 2. Análisis cognitivo.



4. En una clase de matemáticas hay 13 niños y 16 niñas. Cada nombre de los alumnos se escribe en un trozo de papel. Todos los trozos se ponen en un sombrero y el profesor saca uno sin mirar. Cual es más probable que sea niño o niña? Y ¿por qué?

es más probable que saque una niña porque hay 3 mas que los niños y hay mayor cantidad en el grupo de niñas

El 70 % de los estudiantes están de acuerdo que es más probable que salga una niña y asocian esto a que hay más cantidad de niñas que niños, de nuevo los estudiantes utilizan como estrategia las probabilidades aditivas descritas por Cañizares (1997). La figura 14 ilustra el porcentaje de respuestas correctas.

Figura 14. Porcentaje de respuestas. Pregunta 4. Momento 2. Análisis cognitivo.

Preguntas 5 y 6.

El análisis de estas preguntas se hizo conjuntamente porque la información recolectada en ambas era complementaria. Estas preguntas fueron tomadas de Godino y Batanero (2004). Con ellas se quiso evaluar la comprensión de los conceptos de suceso “seguro”, “probable” e “imposible” que tiene el estudiante.

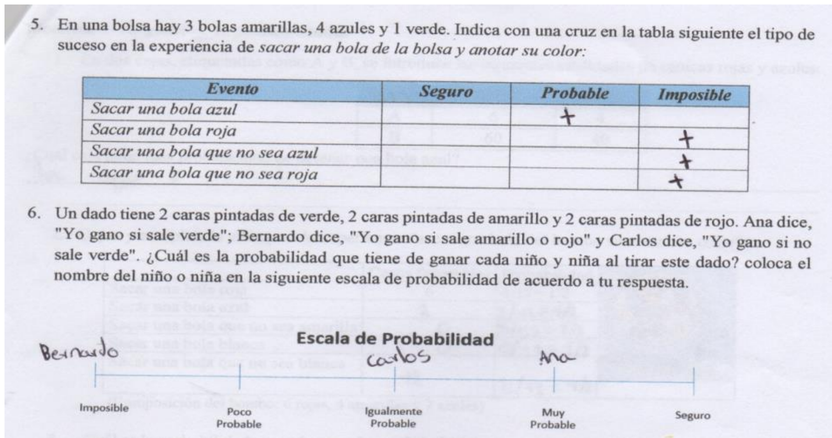
5. En una bolsa hay 3 bolas amarillas, 4 azules y 1 verde. Indica con una cruz en la tabla siguiente el tipo de suceso en la experiencia de *sacar una bola de la bolsa y anotar su color:*

Tabla 3. *Tabla de la pregunta 5. Momento 2. Análisis cognitivo.*

Evento	***Seguro***	***Probable***	***Imposible***
Sacar una bola azul			
Sacar una bola roja			
Sacar una bola que no sea azul			
Sacar una bola que no sea roja			

6. Un dado tiene 2 caras pintadas de verde, 2 caras pintadas de amarillo y 2 caras pintadas de rojo. Ana dice, "Yo gano si sale verde"; Bernardo dice, "Yo gano si sale amarillo o rojo" y Carlos dice, "Yo gano si no sale verde". ¿Cuál es la probabilidad que tiene de ganar cada niño y niña al tirar este dado? coloca el nombre del niño o niña en la siguiente escala de probabilidad de acuerdo a tu respuesta.

Figura 15. Ejemplo 1. Respuesta a la pregunta 4 y 5. Momento 2. Análisis cognitivo.



5. En una bolsa hay 3 bolas amarillas, 4 azules y 1 verde. Indica con una cruz en la tabla siguiente el tipo de suceso en la experiencia de *sacar una bola de la bolsa y anotar su color:*

Evento	*Seguro*	*Probable*	*Imposible*
Sacar una bola azul		+	
Sacar una bola roja			+
Sacar una bola que no sea azul			+
Sacar una bola que no sea roja			+

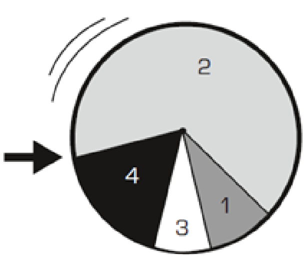
6. Un dado tiene 2 caras pintadas de verde, 2 caras pintadas de amarillo y 2 caras pintadas de rojo. Ana dice, "Yo gano si sale verde"; Bernardo dice, "Yo gano si sale amarillo o rojo" y Carlos dice, "Yo gano si no sale verde". ¿Cuál es la probabilidad que tiene de ganar cada niño y niña al tirar este dado? coloca el nombre del niño o niña en la siguiente escala de probabilidad de acuerdo a tu respuesta.

De acuerdo al ejemplo anterior, las respuestas dadas por los estudiantes a la pregunta 5 dejan en evidencia que no tienen una compresión de los sucesos seguros, probables e imposibles; marcadas en el Derecho Básico 13 de grado 3º, año 2016. El 70% de los estudiantes tuvieron dificultades en reconocer los sucesos probables, lo que es apoyado por Fischbein (1975) citado por Cañizares (1997) que considera que la noción de suceso seguro es más difícil que la de suceso probable. Por otra parte, el 40% tuvo dificultad en identificar cuando un suceso era imposible.

En la pregunta 6 se buscaba que el estudiante identificara cuáles sucesos son equiprobables y cuál es el significado de "poco probable". El 100% de los estudiantes no reconocen que en los tres casos tenían la misma probabilidad de ganar.

Pregunta 7.

La última pregunta del momento dos, fue tomada de la cartilla de pruebas Saber tercero año 2012 pregunta 40 y buscaba que el estudiante resolviera situaciones que requieren estimar grados de posibilidad de ocurrencia de eventos.



Eduardo gana un premio si escoge un número de la ruleta y luego de girar, la flecha señala este número.

¿Qué número debería escoger Eduardo si quiere ganar más fácil?

Figura 16. Imagen pregunta 7. Momento 2. Análisis cognitivo.

En cuanto a estos resultados, el 70% de los estudiantes dicen que se debe escoger el número 2 ya que es más grande, mientras que el 20% seleccionaron el número 4; el 10% restante no sabía responder. Estos resultados dejan de manifiesto que algunos de ellos tienen una idea intuitiva de probabilidad y asocian mayor cantidad a mayor opción. De nuevo estos resultados apoyan los estudios de Fischbein (1975) quien demostró que los niños tienen conocimientos parcialmente formados sobre conceptos probabilísticos basados en intuiciones. Para él, las intuiciones son procesos cognitivos que intervienen directamente en las acciones prácticas. En este caso particular, los niños han elegido intuitivamente la respuesta correcta pero no han desarrollado una idea más formal del concepto probabilidad.

Momento 3: Asignación de probabilidades.

Las preguntas número 1, 2, 3, 4 y 5 fueron tomadas de Batanero y Godino (2004), y la pregunta 6 fue tomada del cuadernillo Pruebas Saber año 2013, grado quinto pregunta 47. En estas preguntas se quería indagar por el razonamiento probabilístico y evaluar la comprensión de la regla de Laplace.

Pregunta 1.

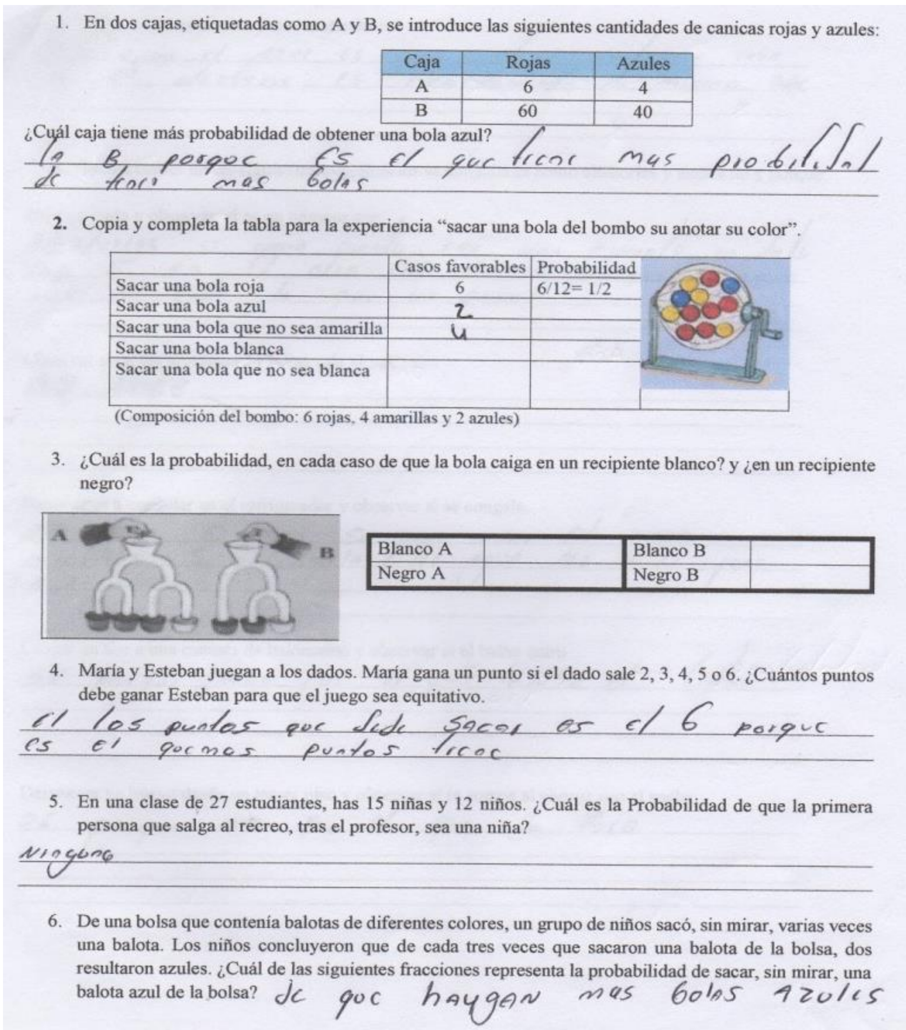
Con esta pregunta se quería analizar si el estudiante es capaz de comparar los sucesos e identificar que tienen igual probabilidad. Para esto se debe aplicar la regla de Laplace, en la que tienen que comparar los casos favorables con los casos posibles en cada urna. Los resultados muestran que esta comparación no es en absoluto espontánea, ni siquiera para los alumnos mayores. El 80% de los estudiantes seleccionaron la Caja B justificando su respuesta porque en ella hay mayor cantidad de bolas azules, el 10% seleccionó la caja A y el restante manifestó no ser capaz de realizar el ejercicio.

Preguntas 2, 3, 4, 5 y 6.

Los resultados de estas preguntas demostraron que los estudiantes no son capaces de resolver correctamente estos ejercicios ya que no se encuentran familiarizados con la regla de Laplace que indica que la probabilidad de un suceso es igual al cociente entre el número de casos favorables y el número de casos posibles, siempre que todos los sucesos sean equiprobables y el espacio muestral asociado al experimento sea finito (Mohamed, 2012).

Para ejemplificar se muestran las respuestas de uno de los estudiantes:

Figura 17. Ejemplo 1. Respuestas momento 3. Análisis cognitivo.



1. En dos cajas, etiquetadas como A y B, se introduce las siguientes cantidades de canicas rojas y azules:

Caja	Rojas	Azules
A	6	4
B	60	40

¿Cuál caja tiene más probabilidad de obtener una bola azul?

la B porque es el que tiene mas probabilidad de tener mas bolas

2. Copia y completa la tabla para la experiencia "sacar una bola del bombo su anotar su color".

	Casos favorables	Probabilidad
Sacar una bola roja	6	6/12= 1/2
Sacar una bola azul	2	
Sacar una bola que no sea amarilla	4	
Sacar una bola blanca		
Sacar una bola que no sea blanca		

(Composición del bombo: 6 rojas, 4 amarillas y 2 azules)

3. ¿Cuál es la probabilidad, en cada caso de que la bola caiga en un recipiente blanco? y ¿en un recipiente negro?

Blanco A		Blanco B	
Negro A		Negro B	

4. María y Esteban juegan a los dados. María gana un punto si el dado sale 2, 3, 4, 5 o 6. ¿Cuántos puntos debe ganar Esteban para que el juego sea equitativo.

el los puntos que Side sacar es el 6 porque es el que mas puntos tiene

5. En una clase de 27 estudiantes, has 15 niñas y 12 niños. ¿Cuál es la Probabilidad de que la primera persona que salga al recreo, tras el profesor, sea una niña?

Ninguna

6. De una bolsa que contenía balotas de diferentes colores, un grupo de niños sacó, sin mirar, varias veces una balota. Los niños concluyeron que de cada tres veces que sacaron una balota de la bolsa, dos resultaron azules. ¿Cuál de las siguientes fracciones representa la probabilidad de sacar, sin mirar, una balota azul de la bolsa? de que haygan mas bolas azules

Analizando los resultados del análisis cognitivo se puede concluir que:

- Los estudiantes tienen una idea intuitiva sobre el azar y la aleatoriedad. Esto concuerda con los estudios de Fischbein (1987), quien demostró que antes de los siete años, los niños tienen un concepto intuitivo del azar. Los estudiantes que realizaron la prueba cursan el grado sexto con edades entre los 11 y 13 años, lo cual no coincide con la edad planteada por Fischbein.

- Los estudiantes aún no han desarrollado un lenguaje probabilístico que incluya palabras como "imposible", "poco probable", "igualmente probable", "muy probable" y "seguro".
- Según Fischbein (1987) aunque los niños tengan una idea intuitiva de conceptos probabilísticos, es necesaria la enseñanza, puesto de otro modo, es posible que una persona llegue a la etapa de operaciones formales con una pobre percepción del azar; y busque relaciones causales que reduzcan lo incierto incluso en situaciones donde no existen estas relaciones, por ejemplo "la mala suerte".

Con base en los resultados de la fase 1, específicamente sobre el análisis cognitivo, a continuación se presentan tres categorías necesarias para el desarrollo del concepto de probabilidad en los niños de grado quinto. Estas categorías guiarán el análisis que se llevará a cabo en las fases siguientes.

Tabla 4. *Categorías para el análisis del concepto de probabilidad.*

Categorías para el análisis del concepto de probabilidad	
Categoría	**Descripción**
Concepto de aleatoriedad.	El primer paso para comenzar a enseñar probabilidad es asegurarse que los niños son capaces de diferenciar las situaciones aleatorias y no aleatorias (deterministas), es decir de apreciar algunas características básicas de la aleatoriedad (Batanero y Godino, 2004)
Lenguaje probabilístico.	Otro de los componentes del razonamiento probabilístico es la comprensión y el uso que hacen los niños del lenguaje de probabilidad. Puesto que en la vida ordinaria se usan con frecuencia palabras como "seguro", "probable", etc., es posible que los niños les otorguen un significado personal no acorde con el significado institucional en el campo probabilístico. (Cañizares, 1997)
Regla de Laplace.	La regla de Laplace indica que la probabilidad de un suceso es igual al cociente entre el número de casos favorables y el número de casos posibles, siempre que todos los sucesos sean equiprobables y el espacio muestral asociado al experimento sea finito (Mohamed, 2012)

6.2.Fase II: Análisis a priori.

En esta fase el investigador decide actuar sobre un determinado número de variables del sistema. Estas son variables que él percibe como pertinentes con relación al problema estudiado. Esta fase se centra en las características de una situación adidáctica que se ha diseñado y que se va a llevar a los estudiantes (Artigue et al, 1995).

En la situación adidáctica propuesta en esta investigación, se quiere indagar sobre las concepciones que presentan los estudiantes de grado quinto sobre la probabilidad. La aplicación de esta situación ayudó a diseñar posteriormente, las situaciones didácticas que apoyarían la comprensión e interiorización de este concepto en las fases posteriores (fase III y fase IV).

La prueba que se propuso está divida en las tres categorías establecidas después del análisis cognitivo relacionadas con las competencias y contenidos que el estudiante debe tener para el aprendizaje de concepto de probabilidad (Anexo 3). En esta fase se buscó, además, predecir los posibles errores o dificultades que presentan los estudiantes a la hora de abordar este concepto.

6.2.1. Actividad 1.

La primera actividad está asociada con el análisis de la categoría 1: “concepto de aleatoriedad”. De acuerdo con Batanero (2013) “el primer paso para comenzar a enseñar probabilidad es asegurarnos que los niños son capaces de diferenciar las situaciones aleatorias y deterministas, es decir de apreciar algunas características básicas de la aleatoriedad” (pp.5). Por ello, en esta primera actividad se presentaron a los estudiantes situaciones de juego que dieran cuenta de esta diferenciación.

En la situación propuesta, el juego 1 y 3 son adaptaciones de Batanero y Godino (2004). El juego 2 se tomó de la página web doslourdes.net que presenta recursos virtuales de apoyo al aprendizaje para la educación primaria.

La actividad presentada a los estudiantes es la siguiente: “Van a realizar una serie de juegos en tu salón por motivo del cumpleaños de tu colegio, algunos de ellos son:

Juego 1 “El dado”: consiste en tirar un dado de seis caras, el cual tiene dos caras de color amarillo, dos caras de color azul y dos caras de color rojo, gana el que acierte el color.

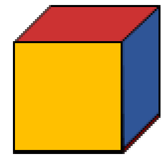


Figura 18.Imagen. Juego 1. Actividad 1. Fase II.

Juego 2 “Pares o Nones”: se juega entre dos jugadores, uno elige PARES y el otro NONES (impares). Luego cada jugador saca entre 0 y 5 dedos de su mano derecha, se suman todos los dedos y si la suma es un número par (0-2-4-6-8 ó 10), gana el jugador que eligió PARES y si la suma es un número impar (1-3-5-7 ó 9), gana el jugador que eligió NONES.

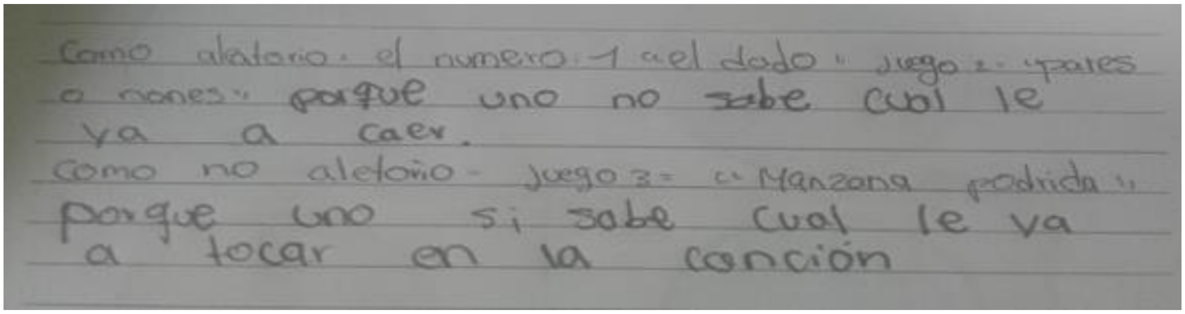
Juegos 3 “Manzana podrida”: todos se colocan en círculo y el líder va señalando a los jugadores siguiendo el ritmo de la canción: “*Manzana, manzana podrida, una, dos y tres, salida”*

El jugador señalado cuando ésta finaliza, queda libre. El juego se repite hasta que sólo queda un jugador, que es el que se la queda, y es el ganador.

¿De los juegos anteriores, cuáles clasificarías como “aleatorio” y cuáles como “no aleatorios”? y ¿por qué?”

Al realizar la primera actividad solo un estudiante al que llamaremos E_2, da una respuesta clara de porque los juegos 1 y 2 son aleatorios y el tercer juego no. Aquí está su respuesta:

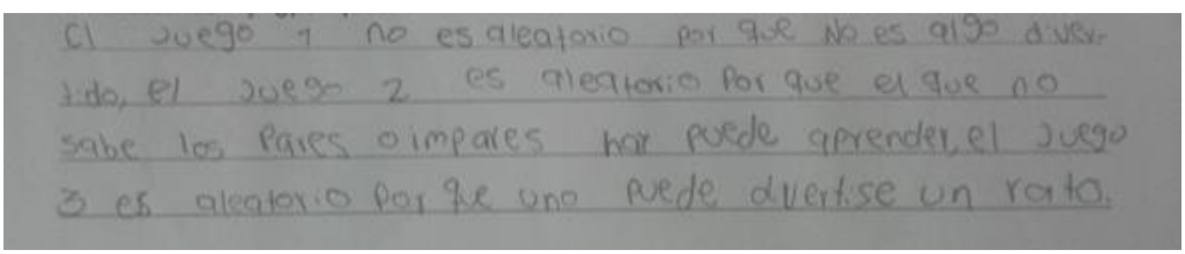
Figura 19. Ejemplo 1. Clasificación "aleatorio y no aleatorio" (E2). Actividad 1. Fase II.


Como aleatorio: el numero 1 "el dado" juego 2: "pares
o nones" porque uno no sabe cual le
va a caer.
Como no aletorio - juego 3 = "Manzana podrida"
porque uno si sabe cual le va
a tocar en la canción

Se puede apreciar que este estudiante (E_2) relaciona el concepto de aleatorio con desconocer el resultado del juego, y no aleatorio cuando se sabe el resultado que se va obtener. En estas respuestas se evidencia una construcción del concepto.

Por su parte, el estudiante E_6 tiene una respuesta similar, pero no reconoce que el juego 3 no es aleatorio. Cuando se indaga sobre su respuesta él justifica: "pienso que son aleatorios porque no sabe qué va a salir y pienso que es no aleatorio porque me dice que hacer". En este estudiante hay algunas ideas sobre los conceptos de eventos aleatorios y determinísticos, pero aún no son claras del todo. En tanto que el estudiante E7 relaciona los juegos aleatorios con diversión, y no aleatorio con lo no divertido, como se observa en la figura 20. En este caso, no hay aún una construcción del concepto.

Figura 20. Ejemplo 2. Clasificación "aleatorio y no aleatorio" (E7). Actividad 1. Fase II.


el juego 1 no es aleatorio por que No es algo diver-
tido, el juego 2 es aleatorio Por que el que no
sabe los Pares o impares har puede aprender el juego
3 es aleatorio Por que uno puede divertise un rato.

Al analizar las respuestas de los otros estudiantes se puede apreciar que no tienen claro el concepto de aleatorio; algún estudiante lo relaciona con la suerte, otros con diversión y azar; algunos saben diferenciar que un juego es aleatorio, pero no saben justificar el porqué de su elección.

6.2.2. Actividad 2.

En la actividad 2 se quiere analizar el uso del lenguaje probabilístico y la relación que tienen los estudiantes con el concepto de probabilidad. Para ello, se diseñó esta actividad, en la cual ellos debían colorear una ruleta para cumplir ciertas condiciones; como se muestra a continuación.

“Otra actividad que van a realizar en tu salón es el juego de ruletas, por lo cual deben construir diferentes ruletas; algunos de los diseños escogidos son:

a) Que tenga dos colores, azul y rojo, que el rojo sea muy poco probable.

b) Tres colores negro, amarillo y verde, que el verde sea igualmente probable, y el negro poco probable.

c) Una ruleta donde el rojo sea imposible.

d) Una ruleta donde el azul sea seguro.

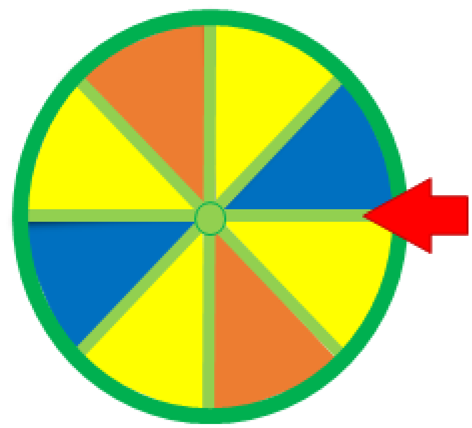
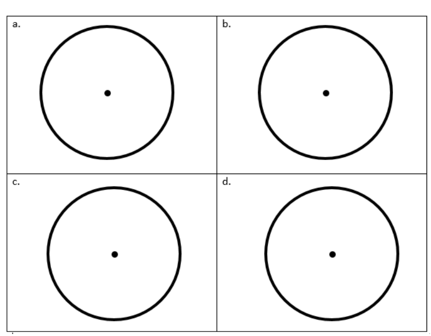


Figura 21.Imagen Actividad 2. Fase II.

Debes ayudar a tus compañeros con el dibujo de cada uno de los diseños escogido para la ruleta para poder facilitar la construcción”.

Figura 22. Imagen 2. Actividad 2. Fase II.



Al analizar las respuestas de los estudiantes, en el enunciado “a”, los estudiantes debían identificar que era necesario pintar la ruleta de dos colores; 6 de ellos lo identificaron correctamente, pero al colocar como condición que el rojo debía ser “poco probable”, no asociaron esto a que tenían que pintar menor cantidad de secciones de este color para que al girar la ruleta tenga menos opción de caer en ella; razón por la cual pintaron la ruleta de los colores solicitados pero en igual número de secciones. El estudiante E1, pintó la ruleta de tres colores mostrando una confusión de los enunciados.

En el numeral “b”, 6 de los estudiantes pintaron la ruleta de los tres colores indicados, 5 de ellos las pintaron en las proporciones indicadas. El estudiante E7 pintó la ruleta con 3 colores, pero con el color verde en una pequeña proporción, lo cual no cumple con la condición de “igualmente probable”, lo que sí se evidencia es que el color negro cumplió la condición de ser poco probable. El estudiante E1, pintó la ruleta de cuatro colores, volviendo a mostrar una confusión de los enunciados.

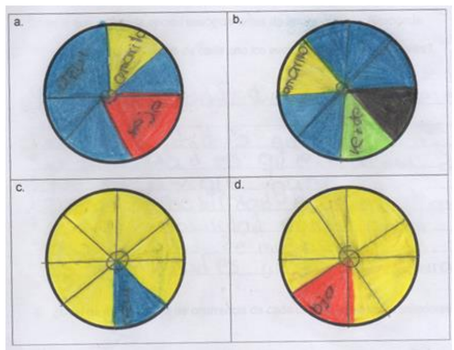
En el numeral “c”, seis de los estudiantes pintaron la ruleta con rojo, lo cual evidencia que ellos no reconocen que para que el suceso donde el color rojo sea imposible de caer en la ruleta, no debe aparecer ese color. El estudiante E1 pintó la ruleta de dos colores diferentes al rojo.

En el numeral “d”, 6 de los estudiantes pintaron la ruleta del color azul, lo cual cumple con la condición de que el color azul fuera seguro. El estudiante E1 pintó la ruleta de dos colores, y ninguno azul y lo cual hace que no cumpla con la condición de ser seguro que caiga el color azul.

Figura 23. Ejemplo 1. Diseño de las ruletas (E2). Actividad 2. Fase II.

Indagando sobre las respuestas del estudiante E1, se le preguntó porque había pintado la ruleta de tres colores en el enunciado “a” y su respuesta fue: “yo las pinté así porque pensé en los colores de la bandera, yo pinte 3 colores porque yo no leí la pregunta y me equivoqué”. Lo que indica que el acierto en pintar la ruleta en el enunciado “c” fue casualidad.

Figura 24. Ejemplo 2. Diseño de las ruletas (E1). Actividad 2. Fase II.



6.2.3. Actividad 3.

En la actividad 3 se busca identificar si los estudiantes reconocen la representación de la probabilidad como el cociente entre número de casos favorables sobre número de casos posibles, y su representación como porcentaje, como se muestra a continuación:

“Uno de tus compañeros propone jugar con un dado de 20 caras y pide a cada uno de los participantes del juego que escoja una de las siguientes opciones:

Figura 25. Imagen y cuadro. Actividad 3. Fase II.

Que caiga el número 16.
Que caiga un número par.
Que caiga un número impar.
Que caiga un múltiplo de 3.
Que caiga un múltiplo de 4.
Que caiga un múltiplo de 5.
Que caiga un múltiplo de 6.
Que caiga un múltiplo de 8.
Que caiga un número terminado en 7.

Gana el que acierte la opción escogida antes de lanzar el dado. Responde:

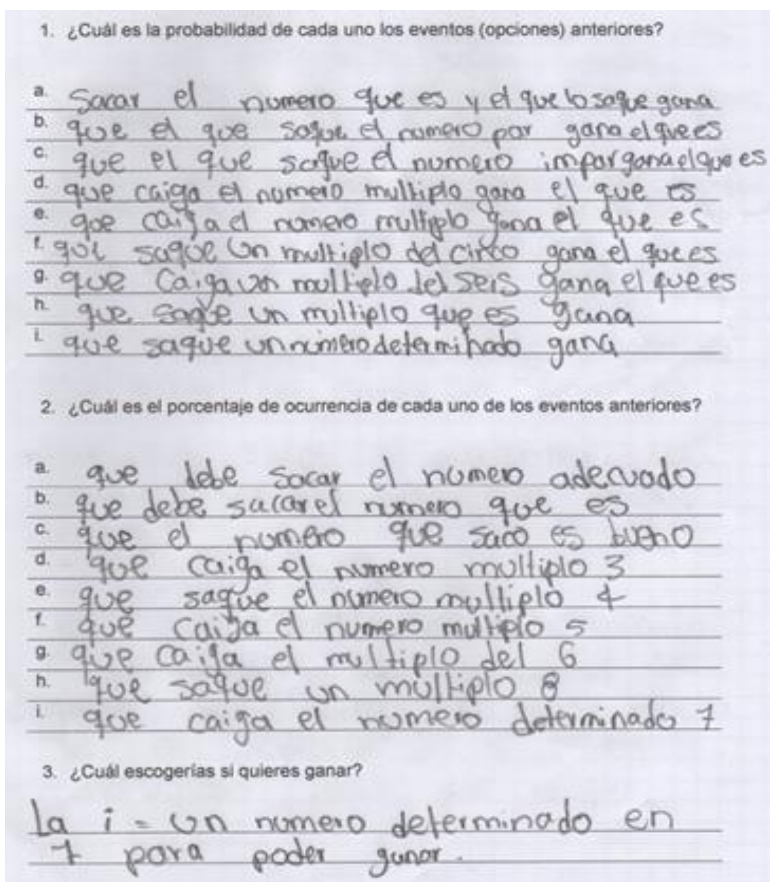
1. ¿Cuál es la probabilidad de cada uno los eventos (opciones) anteriores?

2. ¿Cuál es el porcentaje de ocurrencia de cada uno de los eventos anteriores?

3. ¿Cuál escogerías si quieres ganar?”

La respuesta que dio el estudiante E6 fue que no sabía cómo se hacía. El estudiante E2 trata de explicar en cada evento como gana, pero sin dar una respuesta a la pregunta y cuando se indaga por el porcentaje trata de hacer algo similar.

Figura 26. Ejemplo 1. Probabilidad de cada evento (E2). Actividad 3. Fase II.


1. ¿Cuál es la probabilidad de cada uno los eventos (opciones) anteriores?

a. Sacar el numero que es y el que lo saque gana
b. que el que saque el numero par gana el que es
c. que el que saque el numero impar gana el que es
d. que caiga el numero multiplo gana el que es
e. que caiga el numero multiplo gana el que es
f. que saque un multiplo del cinco gana el que es
g. que caiga un multiplo del seis gana el que es
h. que saque un multiplo que es gana
i. que saque un numero determinado gana

2. ¿Cuál es el porcentaje de ocurrencia de cada uno de los eventos anteriores?

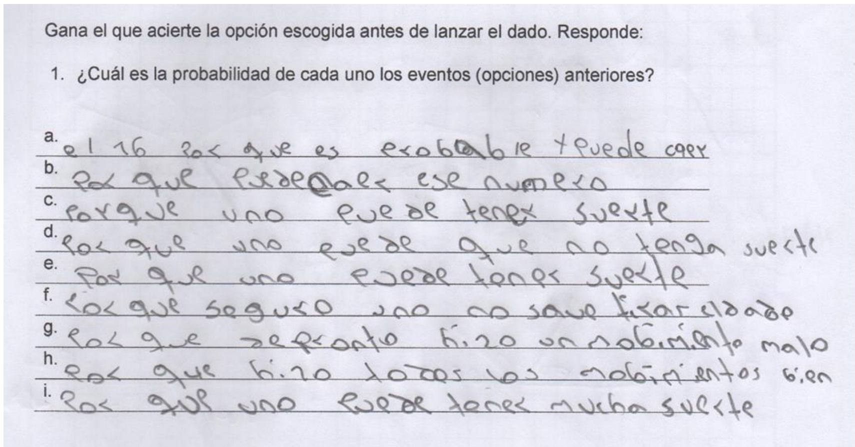
a. que debe sacar el numero adecuado
b. que debe sacar el numero que es
c. que el numero que saco es bueno
d. que caiga el numero multiplo 3
e. que saque el numero multiplo 4
f. que caiga el numero multiplo 5
g. que caiga el multiplo del 6
h. que saque un multiplo 8
i. que caiga el numero determinado 7

3. ¿Cuál escogerías si quieres ganar?

La i = un numero determinado en 7 para poder ganar.

Las respuestas que dan los estudiantes E3 y E4 tratan de explicar qué probabilidad es suerte, pero no dan respuestas claras a la pregunta. Aquí un ejemplo:

Figura 27. Ejemplo 2. Probabilidad de cada evento (E4). Actividad 3. Fase II.

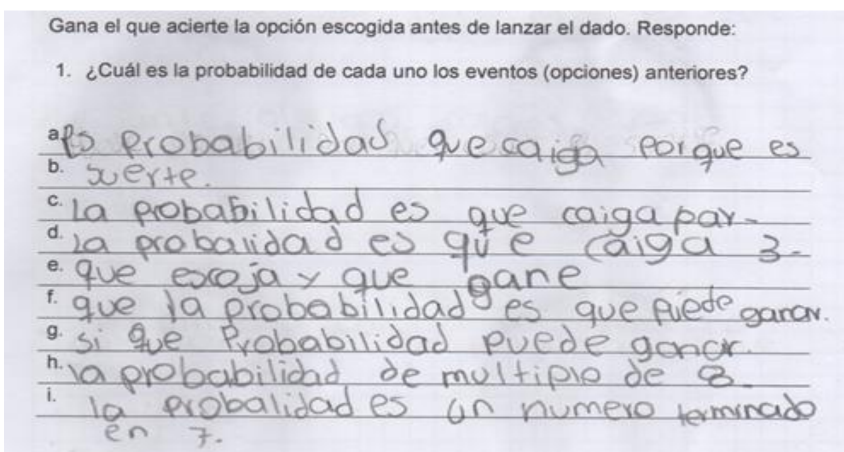

Gana el que acierte la opción escogida antes de lanzar el dado. Responde:

1. ¿Cuál es la probabilidad de cada uno los eventos (opciones) anteriores?

a. el 16 por que es probable y puede caer
b. por que puede caer ese numero
c. porque uno puede tener suerte
d. por que uno puede que no tenga suerte
e. por que uno puede tener suerte
f. por que seguro uno no save tirar el dado
g. por que de pronto hizo un movimiento malo
h. por que hizo todos los movimientos bien
i. por que uno puede tener mucha suerte

Los demás estudiantes tienden a dar respuestas con un valor numérico, sustentando que ese número es más fácil, tal como se muestra en la figura.

Figura 28. Ejemplo 3. Probabilidad de cada evento (E1). Actividad 3 Fase II.


Gana el que acierte la opción escogida antes de lanzar el dado. Responde:

1. ¿Cuál es la probabilidad de cada uno los eventos (opciones) anteriores?

a. es probabilidad que caiga porque es
b. suerte.
c. la probabilidad es que caiga par.
d. la probalidad es que caiga 3.
e. que escoja y que gane
f. que la probabilidad es que puede ganar.
g. si que probabilidad puede ganar.
h. la probabilidad de multiplo de 8.
i. la probalidad es un numero terminado en 7.

En conclusión, las respuestas dadas por los estudiantes reflejaron que no sabían representar la probabilidad como razón y por consiguiente tampoco como porcentaje. Se puede apreciar en las respuestas dadas por los estudiantes en las tres actividades propuestas, que no han desarrollado el concepto de probabilidad, ellos reconocen no saber que es, pero lo relacionan con la suerte, por lo que al parecer han desarrollado intuición primaria de este objeto matemático. De acuerdo con Fischbein (1987) una intuición primaria se forma por la experiencia, sin que haya existido una instrucción sobre el tema. Por el contrario, una intuición secundaria aparece como resultado de un proceso educativo formal. Aunque esta distinción dependería, según Fischbein, del entorno cultural e individual, de modo que si el entorno del niño es más rico en experiencias aleatorias, tendrá más oportunidades de desarrollar intuiciones primarias (sean adecuadas o no). Correspondería a la educación ayudar a convertir esas intuiciones primarias en conocimiento formal.

6.3. Fase III: Experimentación.

En esta tercera fase se lleva a cabo la experimentación, es decir, se aplican las situaciones didácticas de acción, formulación, validación e institucionalización que hacen parte de las secuencias de clase, y se realiza la observación de las mismas (Artigue et al, 1995). Esto para lograr alcanzar la comprensión del concepto de probabilidad.

Es importante mencionar que al comienzo de cada situación el docente-investigador socializa los objetivos de las actividades planteadas con el fin de establecer el contrato didáctico, es decir, las reglas de juego que se deberán seguir.

A pesar de que en la mayoría de investigaciones que usan la metodología de ingeniería didáctica presentan generalmente primero las situaciones de acción, luego las de formulación y las de validación, este ordenamiento no es una regla general (Campeón, 2016).

Cada una de las situaciones didácticas propuestas para la fase de experimentación de esta ingeniería didáctica será analizada a través de las siguientes categorías:

Categoría 1: Concepto de aleatoriedad.

Categoría 2: Lenguaje probabilístico.

Categoría 3: Regla de Laplace.

Hay que aclarar, además, que las actividades que se presentan se formularon con base en la resolución de problemas. Por ello, se presenta a los estudiantes situaciones cotidianas que requieren poner en juego diversos conocimientos y relacionarlos para poder darles solución.

El problema planteado se va a desarrollar en cuatro situaciones, relacionadas entre sí, en la cuales se trabajan las diferentes situaciones didácticas (acción, formulación, validación e institucionalización). A continuación, se presenta las actividades planteadas en cada situación y una descripción de los trabajos realizados por los estudiantes.

6.3.1. Situación 1: Actividades recreativas.

Esta situación fue diseñada con base a la categoría 1 "Concepto de aleatoriedad", con la cual se quería que los estudiantes desarrollaran una "*intuición secundaria".* Se dividió en tres actividades donde se trabajan cuatro situaciones diferentes: acción, formulación, validación e institucionalización. Con estas actividades se quería que los estudiantes reconocieran las características de los eventos aleatorios y no aleatorios (deterministas) y que diferenciaran entre ellos. (Anexo 4)

Las actividades se plantearon teniendo en cuenta que las investigaciones sugieren que a los niños se le facilita adquirir las nociones probabilísticas al introducirlas mediante actividades basadas en juegos de azar (Batanero, 2013). Por ende, se inicia proponiendo 7 actividades recreativas donde los estudiantes deben identificar cuáles de ellas son aleatorias y cuáles no; para ello, en un primer momento, de manera individual el estudiante requiere experimentar con la situación un conflicto cognitivo que ponga en juego sus conocimientos previos; esto mediante la utilización de dispositivos lúdicos (situación de acción). Después del análisis y clasificación de las actividades propuestas, en un segundo momento, los estudiantes trabajan de manera grupal para intercambiar información sobre la estrategia generada y los resultados obtenidos, para crear una nueva solución (situación de formulación). Luego, se realiza una socialización de los resultados ante el resto del grupo donde se da una crítica y reflexión en torno a la solución de la situación fundamental, permitiendo que los estudiantes hagan una aproximación a lo formal del concepto de aleatorio y no aleatorio y pasen de la estrategia inicial a otra más óptima (situación de validación). Finalmente, en el tercer momento, se hace una construcción compartida del conocimiento del concepto de aleatorio y no aleatorio guiada por el docente (situación de institucionalización). A continuación, se describe la situación 1:

"La maestra nos puso de tarea buscar actividades recreativas para desarrollar durante la semana de fiesta de la escuela; debemos escoger actividades donde todos puedan participar y que no dependan de las habilidades físicas ni del conocimiento para ganar. Algunos de tus compañeros han propuesto actividades y debes analizar si cumplen con la condición que dio la profesora. Para ello, debemos realizar cada una de las actividades mínimo 10 veces y verificar si cumple las condiciones dadas por la profe. Con base al resultado debes sacar un listado para proponerles a tus compañeros y así tener la propuesta final".

Momento 1.

Figura 29. Imagen. Actividad 1. Momento 1 Situación 1. Fase III.

Actividad 1.

"Luis propone lanzar un dado, como se muestra en la imagen, el jugador que obtenga una cara de color rojo gana. Si varios jugadores obtienen cara de color rojo vuelven a lanzar hasta que solo uno gane".

Actividad 2.

"Andrés dice que le gusta la idea del dado, pero pide que cambiar el dado por un dado de 10 caras como se muestra en la figura. La condición del juego de Andrés es que el jugador que obtenga una cara de color rojo gana; si varios jugadores obtienen cara de color rojo vuelven a lanzar hasta que solo uno gane, la misma condición anterior".

Figura 30.Imagen. Actividad 2. Momento 1.cSituación 1.Fase III

Para el desarrollo de la actividad 1 los estudiantes utilizaron un dado de color rojo de 6 caras. Para la actividad 2, utilizaron un dado de 10 caras de color azul.

El objetivo de estas actividades era que el estudiante identificara que existen situaciones que al realizarse siempre obtienen el mismo resultado (evento no aleatorio o determinista). En la siguiente situación esto se define como evento seguro.

Como se esperaba, el 100% de los estudiantes realizaron la actividad correctamente. Aquí unos ejemplos:

Figura 31. Ejemplo 1. Lanzamiento dado rojo (E7). Situación 1. Fase III.

lanzamiento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Color de la cara	Rojo	Rojo	Rojo	Rojo	Rojo	Rojo	Rojo	Rojo	Rojo	Rojo

Figura 32. Ejemplo 2. Lanzamiento dado rojo (E3). Situación 1. Fase III

lanzamiento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Color de la cara	9241	9201	9241	9241	9201	9201	9201	9201	9201	9201

Actividad 3 y 4.

Actividad 3:"María opina que la idea del juego del dado de 10 caras es buena, pero propone cambiar las reglas del juego así: se pueden jugar de 2 a 10 jugadores cada jugador escoge un número, se lanza el dado y pierde el jugador quien haya escogido ese número y siguen jugando los demás, hasta que solo que de uno y ese es el ganador".

*Actividad 4: "*Julián propone otra actividad con un dado, que tiene tres colores diferentes (amarillo, azul y rojo) y de solo seis caras, para jugar con este dado se juega entre 1 y 3 jugadores, cada jugador escoge un color, se lanza el dado y gana el que haya atinado el color".

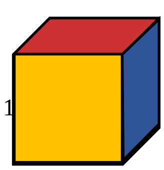


Figura 33. Imagen. Actividad 4. Momento 1.Situación 1

Con la actividad 3 y 4 se esperaba que los estudiantes se dieran cuenta que cuando realizan estas actividades no se puede conocer el resultado que se obtendrá. En la actividad 3 se trabajó con un dado de 10 caras, esperando que los estudiantes identificaran que al lanzarlo 20 veces los resultados posibles variaban entre 0 y 9. Mientras que en la actividad 4 se utilizó un dado de 6 caras con 3 colores diferentes, esperando que los estudiantes identificaran que al lanzar el dado varias veces los resultados variaban entre amarillo, azul o rojo.

Figura 34. Ejemplo 1. Lanzamiento dado 10 caras (E2). Situación 1. Fase III.

lanzamiento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Numero	8	3	9	8	5	1	6	2	6	0

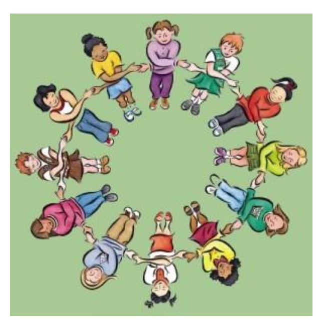
lanzamiento	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Numero	7	3	0	2	2	6	2	0	3	5

Figura 35. Ejemplo 2. Lanzamiento dado 6 caras (E1). Situación 1. Fase III.

lanzamiento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Color de la cara	azul	rojo	amarillo	amarillo	rojo	amarillo	azul	azul	azul	rojo

Actividad 5.

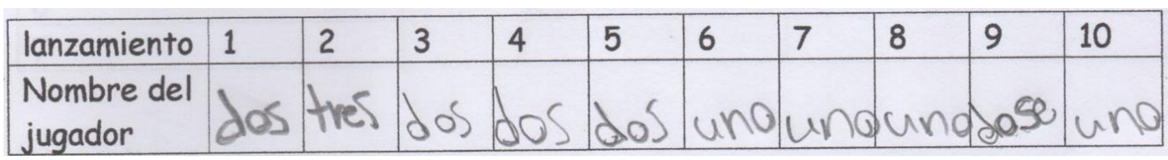
Figura 36. Imagen. Actividad 5. Momento 1. Situación 1. Fase III.



“Adriana quiere proponer algo diferente a los dados y así que presenta la siguiente canción “***De tin marín de dos pingüé, Cúcara, mácara, títere fue, Que ese cochino marrano fue”***, con las siguientes reglas: es para dos jugadores en adelante, existe un líder que es el que guía la actividad, el resto de los jugadores se hace formando un circulo, el líder se ubica en el centro del círculo, él debe cantar la canción y cada vez que diga una palabra debe señalar a un jugador sin saltar ninguno de ellos; cuando termine la canción el jugador que quede señalado pierde el juego, e inicia de nuevo hasta que solo quede una persona".

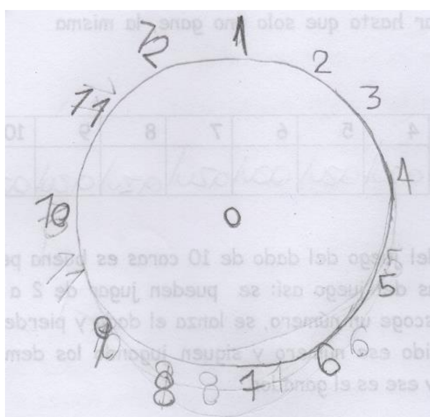
En esta actividad se pretendía que los estudiantes reconocieran que este juego es no aleatorio (determinista) debido a que si la ronda consta de 15 palabras la persona que debe salir es la que está ubicada en la posición 15. Aquí está el ejemplo de una respuesta y la estrategia de resolución de un estudiante; la mayoría lo realizó con base en la figura 37 (donde hay 12 niños) pero no hicieron el conteo correctamente.

Figura 37. Ejemplo 1. Ronda (E6). Situación 1. Fase III.



lanzamiento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre del jugador	dos	tres	dos	dos	dos	uno	uno	uno	dose	uno

Figura 38. Ejemplo 2. Estrategia resolución ronda (E6). Situación 1. Fase III.



Actividad 6.

"Ángela propone un juego que lo llama adivina que saco de la bolsa, y dice que es muy fácil y que todos pueden jugar. El juego consiste en introducir varios objetos en una bolsa y cada jugador dice que objeto va a sacar introduciendo la mano en ella y sacando un objeto. Si es el que quería, gana y si no, pierde y sale del juego. Se vuelve a introducir el objeto y se sigue hasta que uno solo quede un ganador”.

Esta actividad se recreó con los estudiantes utilizando un dulce de chocolate y se les propuso que, si lo sacaban de una bolsa, con diferentes objetos de diferentes tamaños durante 10 veces consecutivas, ganarían el dulce. Esta situación es determinista porque a través del tacto se puede elegir siempre el objeto que se quiere sacar. En este caso el 100% de los estudiantes lo realizaron correctamente:

Figura 39. Ejemplo 1. Objetos de una bolsa (E3). Situación 1.Fase III.

Intentos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
objetos	Chocolate	Chocola	choco	choco	choco	Choco	Choco	Choco	choco	Choco

Actividad 7.

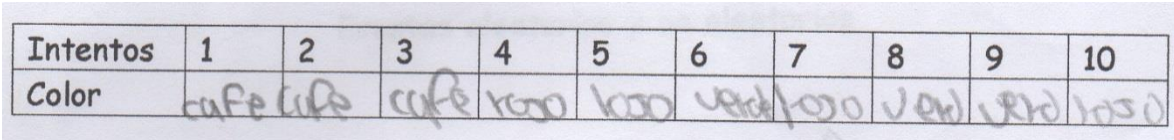
“Carlos dice que le agrada la idea de Ángela pero que propone un cambio, que los objetos sean de la misma forma y tamaño, así que propone colocar en la bolsa dados de diferentes colores y o fichas y utilizando las mismas reglas”.

Esta actividad también la recrearon los niños usando dados de diferentes colores, pero de igual forma y tamaño. El objetivo de esta actividad era identificar una situación aleatoria. Estos son los ejemplos de respuesta:

Figura 40. Ejemplo 1. Objetos de una bolsa 2 (E3). Situación 1. Fase III.

Intentos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Color	cafe	cafe	cafe	roso	roso	verde	roso	verde	verde	roso

Figura 41. Ejemplo 2. Objetos de una bolsa 2 (E5). Situación 1 Fase III.



Intentos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Color	cafe	cafe	cafe	roso	roso	verde	roso	verde	verde	roso

Una vez el estudiante había realizado las siete actividades, debía diligenciar un cuadro y justificar sus respuestas. El consolidado de respuesta de los estudiantes fue:

Tabla 5. *Consolidado respuestas situación 1. Momento 1. Fase III.*

Actividad	Correcta		Incorrectas	
1	1	14%	6	86%
2	1	14%	6	86%
3	5	71%	2	29%
4	5	71%	2	29%
5	0	0%	7	100%
6	1	14%	6	86%
7	5	71%	2	29%
total	18	23%	31	63%

En la tabla anterior se puede apreciar que, aunque los niños realizaron la mayoría de las actividades, solo 23% de las clasificaciones fueron correctas.

Cuando se le pide que justifiquen, dan diversas respuestas con las cuales se puede concluir que no tienen claro el concepto de aleatoriedad el cual tienden a confundir con el determinista, como se había descrito en la fase 2.

Tabla 6. *Justificación de respuestas de los estudiantes. Situación 1. Momento 1. Fase III.*

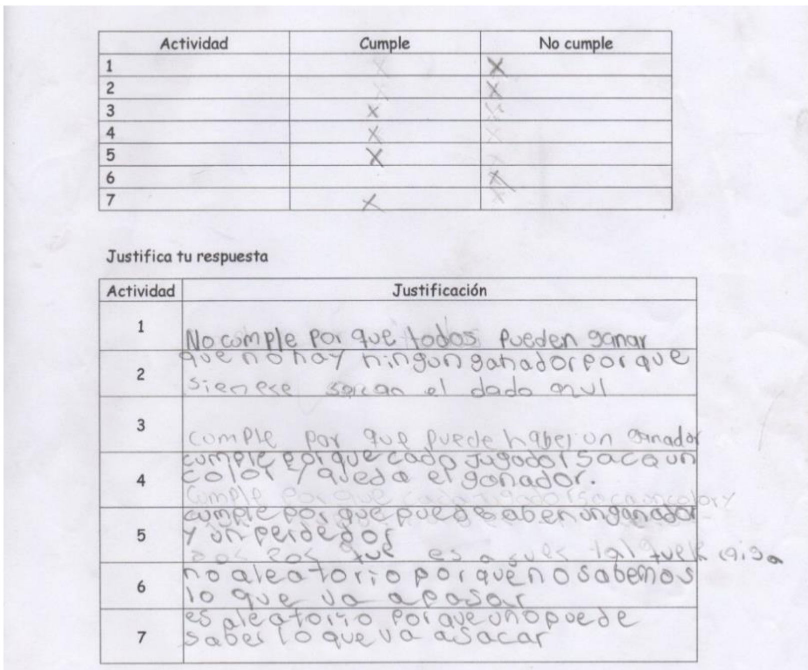
		Estudiantes						
		E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7
Actividad recreativa	1	Porque se tiene que tirar un dado y es de suerte	Porque uno no sabe que va salir	Porque todo es dado es del mismo color	Porque el dado era de un solo color rojo	Si cumple porque juegan todos	Cumple por que juegan todo	No cumple porque todos ganan
	2	Uno tiene que escoger porque es de suerte y consiste de suerte	Si porque sabe cuál le toca	Porque puede caer el azul siempre	Porque el dado era de un solo color azul	Si cumple por el juego es para todos	Cumple porque si solo queda un jugador ese es el único ganador	No cumple porque todos ganan
	3	Se cumple porque lo tiene que tirar el que es de suerte.	Si porque uno sabe	Porque todo el dado es del mismo color	Porque los 3 lados eran de un son de distinto color	Si cumple porque debemos hacerla	Cumple porque juega entre todos hasta que quede uno	No cumple porque todos podrían perder
	4	Tiene que coger un dado y se cumple	Porque hay tres colores y lo sabe	Porque cae otro color	Porque uno de todo puede ganar o perder	Si cumple porque trata de los necesario	Porque cada uno escoge un color y el color que caiga gana	Tampoco cumple porque no caía fácil
	5	Se cumple porque los dados porque se cumple en tirar	Porque uno cuenta la canción adecuada	Porque uno gana	Porque puede ganar	Si cumple porque había ganador	Cumple porque solo tiene que quedar una persona	Si cumple porque solo hay un ganador
	6	Se cumple el juego porque cumple tirarse	Porque uno se sabe el tamaño de la chocolata	Porque saca otro objeto	Porque puede perder	Si cumple porque debería perder	Porque van sacando hasta solo uno	También cumple porque para uno conocer un objeto debe tocar
	7	Se cumple porque consigue en tirar un dado	Porque uno no se sabe el tamaño del dado ni el color	Porque saca otro color	Si cumple porque puede haber un empate	Si cumple porque puede empatar	Si porque si saca solo un objeto gana	No cumple porque si son del mismo tamaño es difícil saber cuál es cual

Para lograr el objetivo de esta situación se realiza la actividad en grupo, para generar nuevos razonamientos, conocimiento e ideas para comprender la situación (fase de formulación).

Momento 2.

En este momento los estudiantes realizaron la actividad en grupo.

Figura 42. Ejemplo 1. Condición aleatoria. Grupo 2. (E1, E4, E7). Situación 1. Fase III.



Actividad	Cumple	No cumple
1		X
2		X
3	X	
4	X	
5	X	
6		X
7	X	

Justifica tu respuesta

Actividad	Justificación
1	No cumple por que todos pueden ganar
2	que no hay ningun ganador porque siempre sacan el dado azul
3	cumple por que puede haber un ganador
4	cumple porque cada jugador saca un color y queda el ganador.
5	cumple porque puede saber un ganador y un perdedor
6	no aleatorio porque no sabemos lo que va a pasar
7	es aleatorio porque uno puede saber lo que va a sacar

Los resultados en esta actividad fueron:

Tabla 7. *Consolidado respuestas. Situación 1. Momento 2. Fase III.*

Actividad	Correcta		Incorrectas	
1	3	100%	0	0%
2	3	100%	0	0%
3	3	100%	0	0%
4	3	100%	0	0%
5	0	0%	3	100%
6	1	33%	2	67%
7	3	100%	0	0%
Total	16	76%	5	24%

En esta tabla se puede ver mejorías con relación al resultado del momento anterior donde el 76% de las clasificaciones fueron correctas, apreciándose que en la actividad 5 los estudiantes tienen una confusión debido al mal uso del conteo. Para reforzar la actividad 5 se realizó varias veces el juego para que los estudiantes identificaran que éste es determinista. Las siguientes son las justificaciones de los grupos, donde se puede notar una mayor coherencia en sus respuestas:

Tabla 8*. Justificación de respuestas de los grupos. Situación 1. Momento 2. Fase III***.**

		Grupo		
		1	**2**	**3**
Actividades recreativas	**1**	No es aleatorio porque todo el dado es rojo	No cumple porque todos pueden ganar	Porque se sabe que todos gana
	2	No es aleatorio porque el dado es azul	Que no hay ningún ganador porque siempre saca el dado de color azul	No es aleatorio porque no siempre es el mismo número
	3	Si es aleatorio porque uno o sabe quién va a ganar	Cumple porque puede haber un ganador	Es aleatorio porque no sabe el número que va a caer
	4	Si es aleatorio porque el dado es de diferente color de diferentes colores	Cumple porque cada jugador saca un color y queda un ganador	Es aleatorio porque no sabe qué va a caer
	5	Si es aleatorio porque no sabe quién gana	Cumple porque puede haber un ganado y un perdedor	Es aleatorio porque no se sabe quién va a ganar
	6	No es aleatorio porque no se sabe el tamaño	No aleatorio porque no sabemos lo que va a pasar	Es aleatorio porque usted no sabe el que va agarra o va sacar.
	7	Si es aleatorio porque no se sabe el tamaño	Es aleatorio porque uno puede saber lo que va a sacar.	No es aleatorio porque usted no sabe qué va a sacar de pronto saca el mismo

Momento 3.

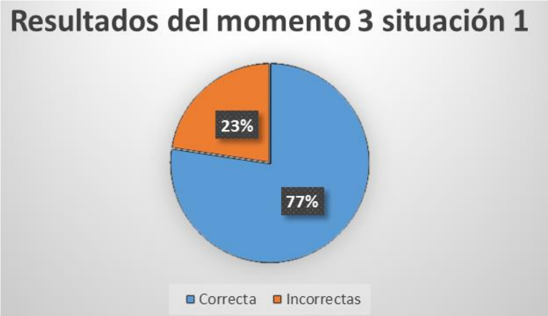
En este momento se pretende verificar si los estudiantes ya son capaces de diferenciar algunos eventos aleatorios y no aleatorios. Este es el ejemplo de una de las respuestas:

Figura 43. Ejemplo 1. Eventos aleatorios y no aleatorios (E7). Situación 1. Fase III.

Evento	Aleatorio / No aleatorio
Ir a la escuela de lunes a viernes	No aleatorio
El primero de enero es festivo	No aleatorio
Extraer una canica verde de una caja que contiene canicas verdes y amarillas	aleatorio
octubre tiene 31 días	No aleatorio
Lanzar un dado y obtener el 2	aleatorio
Lanzar una moneda y que caiga cara	aleatorio
Que mañana sea jueves	No aleatorio
Lanzar un dado y obtener 8	aleatorio
Extraer una canica verde de una caja que contiene sólo canicas amarillas.	No aleatorio
Observar si en las próximas 24 horas sale el sol.	No aleatorio
Tirar un dado y observar si es un número par.	aleatorio
Ganarse una bicicleta	aleatorio
Bañarse todos los días	No aleateorio

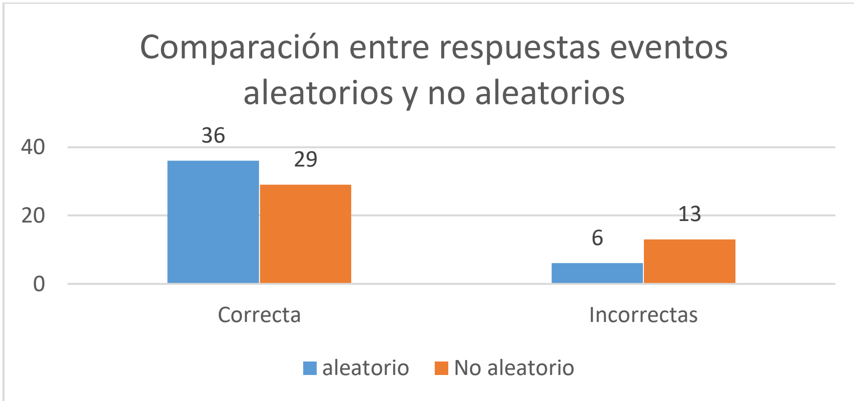
Los resultados de este momento se pueden resumir en la siguiente figura:

Figura 44. Porcentaje respuestas. Momento 3. Situación 1. Fase III.



En esta figura se puede apreciar que el 77% de las clasificaciones fueron correctas en comparación con el 23% de la actividad individual. Al realizar la comparación entre respuestas entre eventos aleatorios y no aleatorios se puede afirmar que los estudiantes tienen mayor dificultad en identificar los eventos no aleatorios.

Figura 45. Comparación respuestas eventos aleatorios y no aleatorios. Momento 3. Situación 1. Fase III.



Al finalizar esta situación se trata de definir el concepto de aleatorio y no aleatorio construyendo colectivamente el significado del término.

Finalmente, cabe aclarar que el concepto de aleatoriedad se reforzó durante las situaciones siguientes, de manera secundaria e integrándolo a las demás actividades trabajadas. Estos son algunos ejemplos de la definición:

Figura 46. Ejemplo 2. Definición conceptos (E6). Situación 1. Fase III.

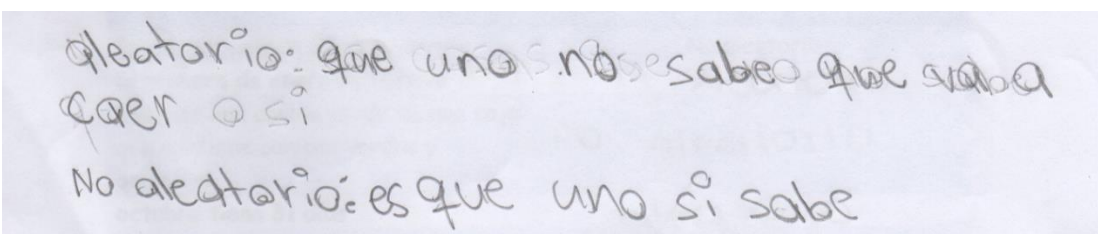
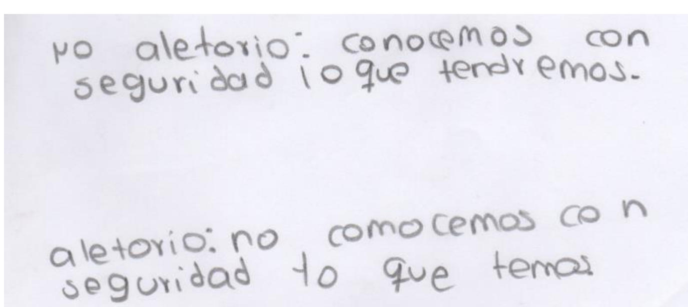


Figura 47. Figura 47. Ejemplo 1. Definición conceptos (E1). Situación 1. Fase III.



6.3.2. Situación 2: Actividades recreativas 2

Esta situación fue diseñada con base en la categoría 2 “lenguaje probabilístico”. Los objetivos de esta situación eran determinar la posibilidad de ocurrencia de un evento de manera correcta y clasificar la posibilidad de ocurrencia de un evento con ayuda de la escala de probabilidad (lenguaje probabilístico). (Anexo 5).

En esta situación se trabajaron varios momentos: en el primero los estudiantes realizaron una actividad individual donde debían analizar las diferentes posibilidades que tenían para ganar o perder en tres juegos; en el momento dos, también de manera individual, se retoman las actividades trabajadas en el momento uno, pero en esta ocasión deben utilizar el lenguaje probabilístico y clasificar algunos eventos que pueden ocurrir dentro de las actividades. En el momento tres, se verifica si el estudiante aprendió a clasificar los eventos utilizando un lenguaje probabilístico y puede construir una definición de ellos. Cabe mencionar que en las tres actividades a los estudiantes se les entregó el material para que lo manipularan (dados y fichas).

Esta fue la actividad presentada a los estudiantes:

“La profesora ha seleccionado algunas actividades recreativas para realizar en la semana de fiesta de la escuela, ahora vas a estudiar algunas de ellas y analizar cada una para mirar las diferentes posibilidades que tiene para ganar o perder y así poder tomar una decisión en cual te gustaría jugar”.

Momento 1.

Actividad 1.

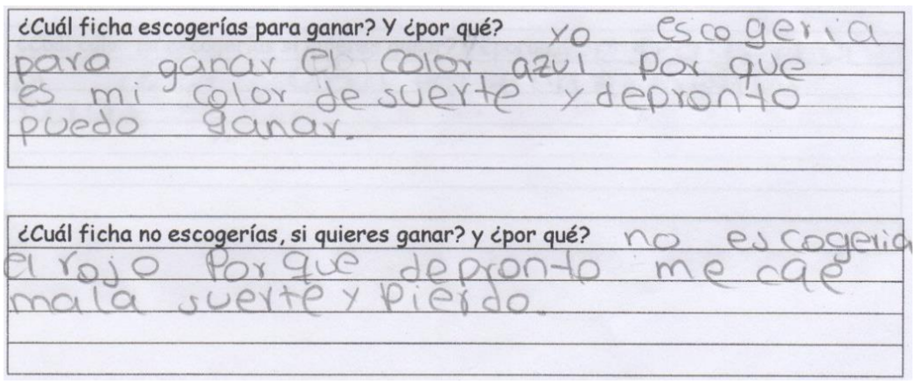
“La actividad consiste escoger un color y tratar de sacar una ficha de ese color de una bolsa. Se sabe que las fichas son de diferentes colores azules, amarillas y rojas, y que el total de fichas es de 20. Las fichas están distribuidas así: 4 amarillas, 6 rojas y 10 azules.

¿Cuál ficha escogerías para ganar? Y ¿por qué?

¿Cuál ficha no escogerías, si quieres ganar? y ¿por qué?”

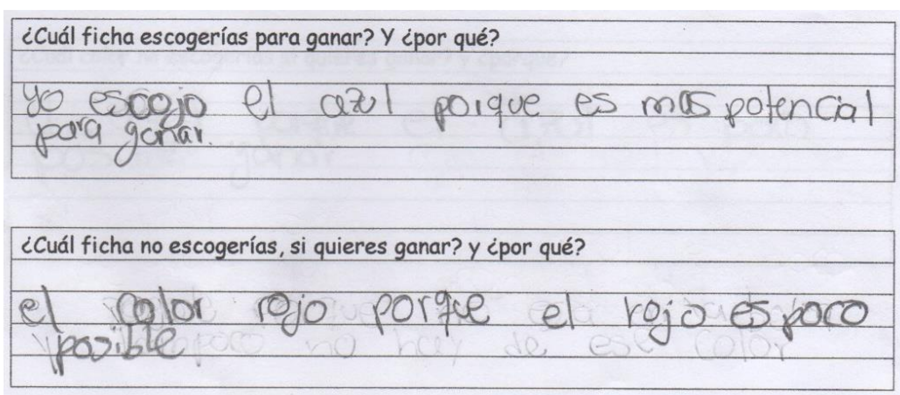
En esta actividad se esperaba que el estudiante identificara que las fichas azules tenían más opción de ganar debido a que había mayor cantidad de ellas y que las fichas amarillas eran las que menor opción tenían de ganar. Algunas respuestas fueron:

Figura 48. Ejemplo 1. Elección de fichas (E1). Situación 2. Fase III.


¿Cuál ficha escogerías para ganar? Y ¿por qué? yo escogeria para ganar el color azul por que es mi color de suerte y depronto puedo ganar.

¿Cuál ficha no escogerías, si quieres ganar? y ¿por qué? no escogeria el rojo porque depronto me cae mala suerte y pierdo.

Figura 49. Ejemplo 2. Elección de fichas (E2). Situación 2. Fase III.


¿Cuál ficha escogerías para ganar? Y ¿por qué?
yo escojo el azul poique es mas potencial para ganar.

¿Cuál ficha no escogerías, si quieres ganar? y ¿por qué?
el color rojo porque el rojo es poco posible

Después de esta actividad, el 43% de los estudiantes fueron capaces de identificar que la ficha de color azul era la que tenía más posibilidad de ganar y el 43% seleccionó las fichas amarillas como las que tienen menos posibilidad. Se ha de apreciar que solo un estudiante (14%), identificó las dos fichas correctamente.

Tabla 9. *Porcentaje de respuesta de los estudiantes. Situación 2. Momento 1. Actividad 1. Fase III.*

	Amarilla		Roja		Azul	
¿Cuál ficha escogerías para ganar?	2	29%	2	29%	3	43%
¿Cuál ficha no escogerías para ganar?	3	43%	2	29%	2	29%

Al observar las justificaciones de los estudiantes se puede apreciar que todavía hacen su selección con base a la suerte, al gusto por el color o por experiencias en otros juegos; como se aprecia en la siguiente tabla.

Tabla 10. *Justificación de respuesta de los estudiantes. Situación 2. Momento 1. Actividad 1. Fase III.*

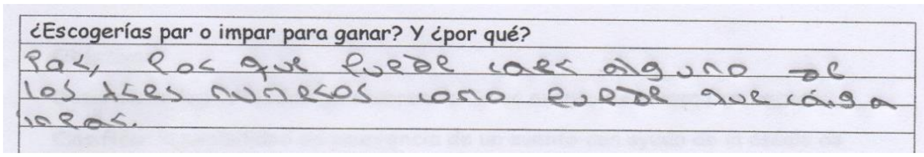
	1	2	3	4	5	6	7
¿Cuál ficha escogerías para ganar?	Para ganar el color azul porque es mi color de suerte y de pronto puedo ganar	Yo escojo el azul porque es más potencial para ganar	Rojo porque a uno le puede dar suerte al sacar la ficha	Amarilla por que puede ser muy probable que pueda sacar ese color que escogí	Rojas por que el rojo es el color que más me ha caído en el juego de dados	Las azules porque hay más que otros colores	El amarillo porque sería fácil cogería
¿Cuál ficha no escogerías para ganar?	El rojo porque de pronto me tiene mala suerte y pierdo	El color rojo porque rojo es poco probable	Amarillo porque uno puede sacar el color rojo o azul porque hay pocas fichas amarillas	La azul porque puede que la saque como pueda que si	Amarilla por que el amarillo es el más difícil de caer	Amarillo porque hay muy pocas	El azul porque el color azul es muy confuso para mi

Actividad 2

“La actividad consiste en lanzar un dado de 6 caras y debes escoger entre par e impar, ganas si aciertas: ¿Escogerías par o impar para ganar? Y ¿por qué?”

En esta actividad se pretendía que los estudiantes identificaran que tenían igual opción de ganar (es decir, un evento equiprobable).

Figura 50. Ejemplo 1. Elección par o impar (E4).Situación 2. Fase III.



Analizando las respuestas de los estudiantes, el 71% de ellos escogería el número par y el 29% escogería número impar. Según estas respuestas ningún estudiante identificó que ambas tenían igual posibilidad. A continuación se presentan los porcentajes de respuesta así como las justificaciones de su elección:

Tabla 11. *Porcentaje de respuesta de los estudiantes. Situación 2. Momento 1. Actividad 2. Fase III.*

¿Cuál color escogerías para ganar?	Par		Impar	
	5	71%	2	29%

Tabla 12. *Justificación de respuestas estudiantes. Situación 2. Momento 1. Actividad 2. Fase III.*

	Estudiante						
	1	2	3	4	5	6	7
¿Escogerías par o impar para ganar? Y ¿por qué?	Par porque uno puede ganar, pero puede perder	Par porque uno puede ganar, pero también puede perder	Par porque a uno le puede caer el número 2-4-6	Par porque puede caer alguno de los tres números como puede caiga impar	Par porque el par es el número que más fácil caen	Impar porque puede que caiga como puede que no caiga	Yo escojo el impar porque es más fácil de caer

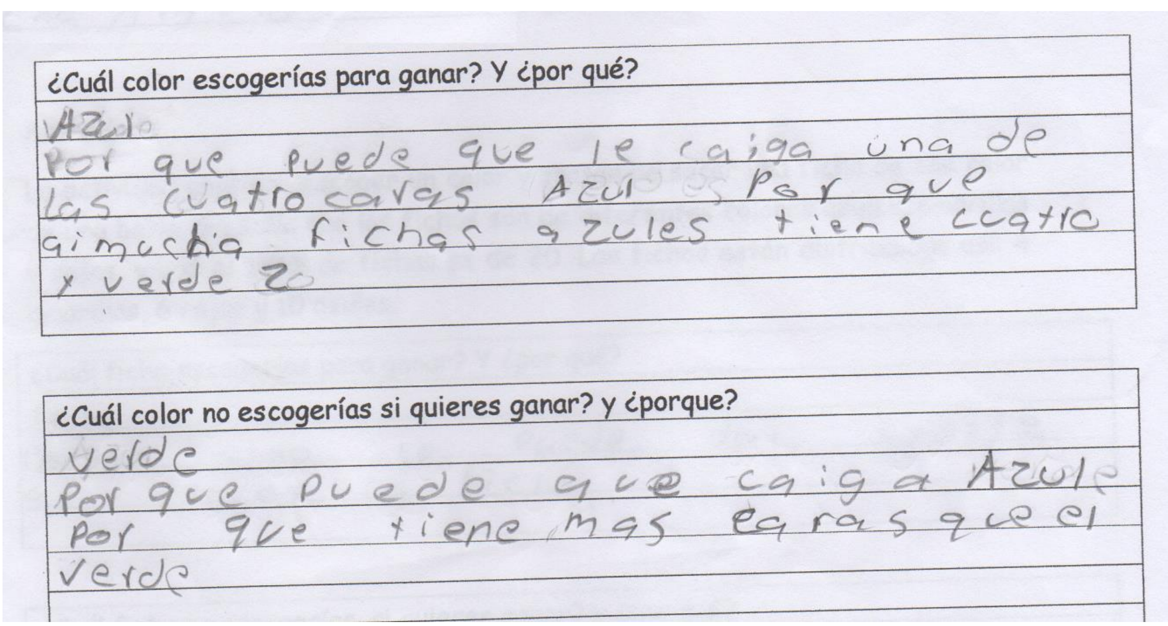
En la justificación de las respuestas la mayoría de estudiantes no son muy explícitos. Se observa que el estudiante E4 tiene una idea más próxima a la respuesta correcta, aunque haya seleccionado la opción de número par, en su justificación identifica que ambas tienen igual opción de caer.

Actividad 3

“La actividad consiste en lanzar un dado de dos colores verde y azul. El dado tiene dos caras verdes y cuatro azules y debes escoger un color de los dos; ganas si aciertas el color. ¿Cuál color escogerías para ganar? ¿por qué? Y ¿Cuál color no escogerías si quieres ganar? y ¿por qué?”

El objetivo de la actividad es que los estudiantes identificaran que el color azul tenía más opción que el color verde.

Figura 51. Ejemplo 1. Elección color (E3). Situación 2. Fase III.



¿Cuál color escogerías para ganar? Y ¿por qué?

Azul
Por que puede que le caiga una de las cuatro caras Azul es Por que aimucha fichas azules tiene cuatro y verde 2

¿Cuál color no escogerías si quieres ganar? y ¿porque?

verde
Por que puede que caiga Azule Por que tiene mas caras que el verde

Los resultados de esta pregunta muestran que todos los estudiantes seleccionaron el color azul como la mayor opción para ganar y el verde con el de menos opción, exceptuando un estudiante que no respondió; al igual cuando justifican su respuesta dejan ver que la mayoría basa su elección en el número de caras pintadas de color azul y /o verde y algunos con la suerte. En la tabla siguiente están las justificaciones de los estudiantes a su elección.

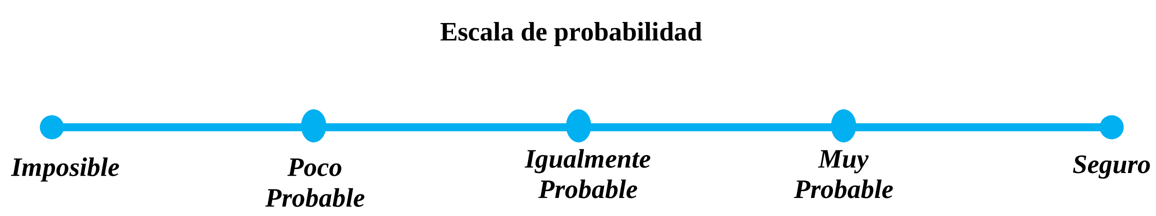
Tabla 13. *Justificación de respuestas estudiantes. Situación 2. Momento 1. Actividad 3. Fase III.*

	Estudiante						
	1	2	3	4	5	6	7
¿Cuál color escogerías para ganar? Y ¿por qué?	azul porque el azul tiene más caras que el color verde porque el verde es menos probable que el azul	El azul porque es harto posible ganar	azul porque puede que le caiga una de las cuatro caras azules porque hay muchas fichas azules tiene 4 y verde 2	El azul porque hay más posibilidades de que caiga ese color como puede que caiga el verde	El azul porque el azul es el segundo valor que más cae fácil y con probabilidad de que sea tiene las caras	Azul porque es posible que caiga	Azul porque tiene más azul que verde puede caer
¿Cuál color no escogerías si quieres ganar? Y ¿porque?	El color verde porque tiene menos caras	El verde porque el verde es poco posible ganar	Verde puede que caiga el azul porque tiene más caras que el verde	El verde que puede que no lo saque o puede que tenga suerte y lo saque	El verde porque el verde es difícil de que caiga	No responde	El verde porque más poquitas y no puede caer

Momento 2.

“Dependiendo de los eventos, existen diferentes posibilidades de su ocurrencia. Estos se pueden distribuir en una escala de probabilidad, así:

Figura 52. Escala de probabilidad.



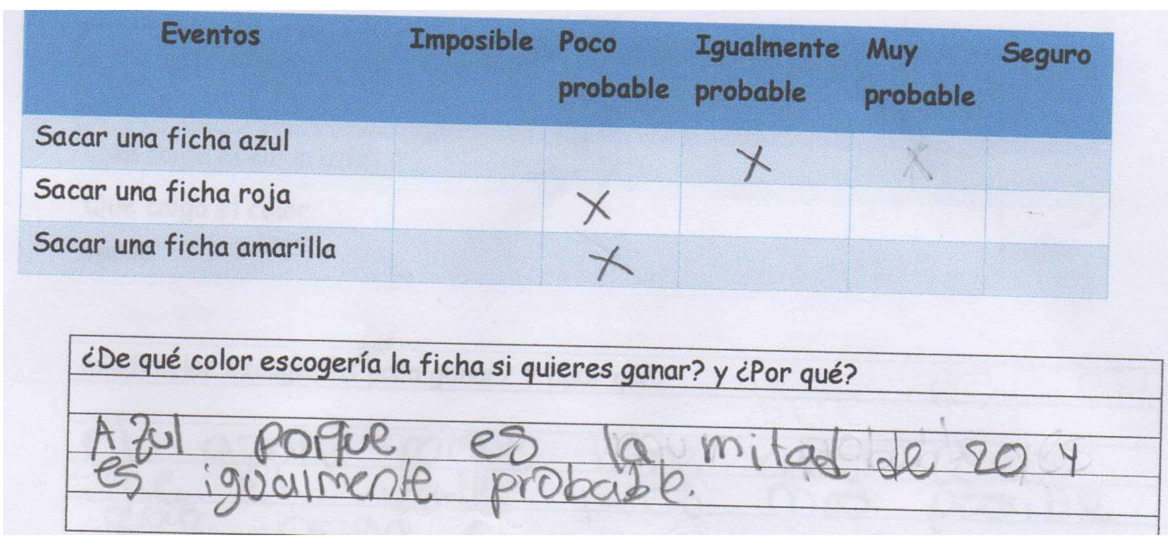
Ahora debes analizar las actividades y determinar la posibilidad de ocurrencia de los eventos, para ellos nos vamos ayudar en la escala de probabilidad. Marcaremos con una X la posibilidad de ocurrencia de cada evento, para así mirar que tanta oportunidad tienes para ganar".

En este momento lo que se quería es que el estudiante después de haber analizado las tres actividades recreativas propuestas, tratara de hacer un paralelo entre sus saberes y el lenguaje probabilístico. Para eso, se da como guía la escala de probabilidad, para que le ayude a identificar el manejo adecuado de este lenguaje. Además, se les dan varios eventos y debe identificar en que escala están.

Actividad A.

"La actividad consiste escoger un color y tratar de sacar una ficha de ese color de una bolsa. Se sabe que las fichas son de diferentes colores azules, amarillas y rojas, y que el total de fichas es de 20. Las fichas están distribuidas así: 4 amarillas, 6 rojas y 10 azules".

Figura 53. Ejemplo 1. Elección fichas usando la escala de probabilidad (E2). Situación 2. Fase III.

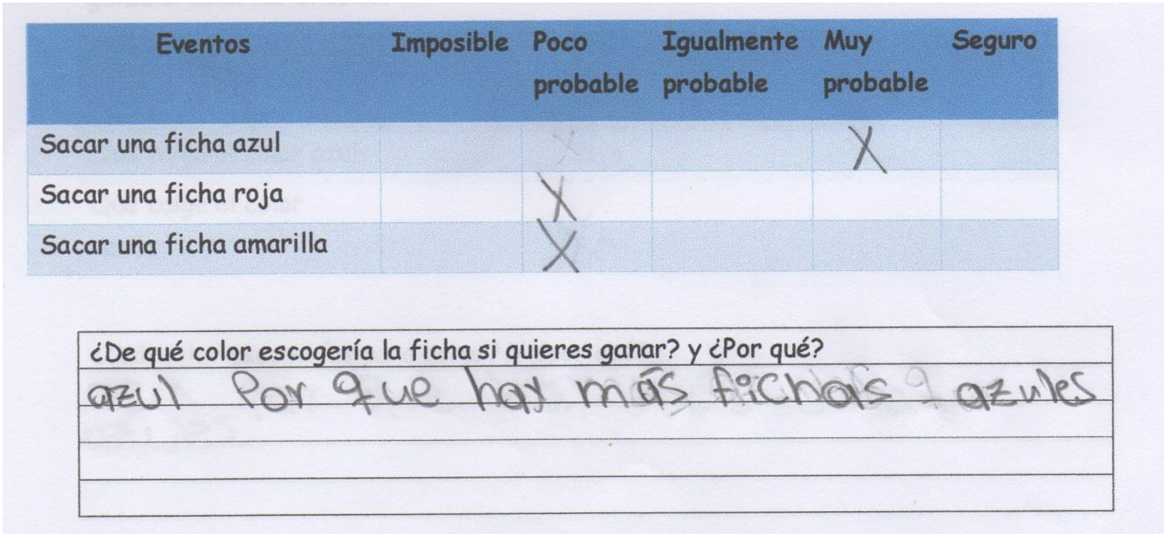


Eventos	Imposible	Poco probable	Igualmente probable	Muy probable	Seguro
Sacar una ficha azul			X	X	
Sacar una ficha roja		X			
Sacar una ficha amarilla		X			

¿De qué color escogería la ficha si quieres ganar? y ¿Por qué?

Azul porque es la mitad de 20 y es igualmente probable.

Figura 54. Ejemplo 2. Elección fichas usando la escala de probabilidad (E6). Situación 2. Fase III.



En la respuesta de los estudiantes se aprecia que el 29% de ellos identifican que la ficha de color azul es igualmente probable, el 43% de las fichas rojas como poco probable; lo mismo sucede con el 57% de las fichas amarillas. Estos resultados dejan ver que los estudiantes tienen poco manejo del lenguaje probabilístico, como se evidenciaba en análisis cognitivo.

Tabla 14. *Porcentaje de respuesta de los estudiantes. Situación 2. Momento 2.Actividad 2. Fase III.*

Eventos	Imposible	Poco probable	Igualmente probable	Muy probable	Seguro
Sacar una ficha azul	0%	14%	29%	29%	29%
Sacar una ficha roja	0%	43%	14%	43%	0%
Sacar una ficha amarilla	0%	57%	0%	29%	14%

Al analizar las respuesta y justificación a esta pregunta se aprecia claramente que el 86% seleccionan la ficha azul, algunos reconocen que es porque tiene más fichas que los demás, y el

14% sustenta que es porque tiene la mitad de las fichas. Hay un 14% que selecciona la ficha roja, al preguntar su elección el estudiante dice que es que no comprendió lo que tenía que hacer y a él gusta el rojo.

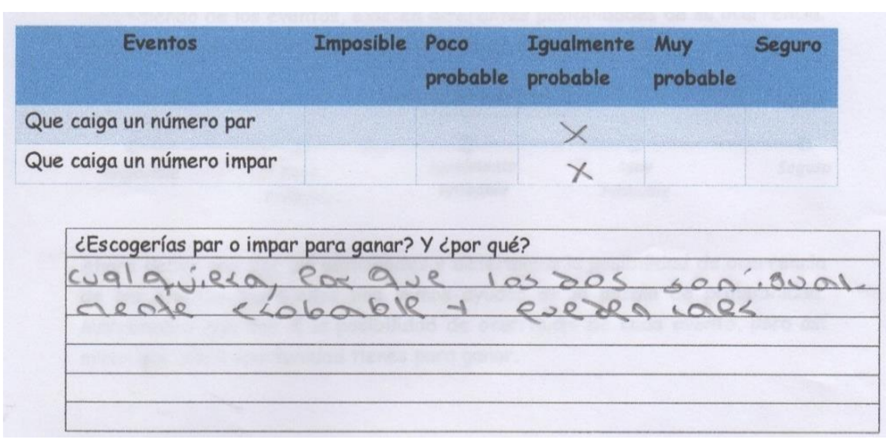
Tabla 15. *Justificación de respuestas de los estudiantes. Situación 2. Momento 2. Actividad A. Fase III.*

Estudiante						
1	2	3	4	5	6	7
Azul porque tiene más fichas que las otras y tiene más probabilidad de ganar	Azul porque es la mitad de 20 y es igualmente probable	Azul es la que tiene más fichas de todas	Azul porque si sacan varias veces puedo sacar más veces el azul	Rojas porque la roja puede tener más cantidad así que la ganadora es la roja	Azul porque hay más fichas azules	Azul porque hay más posibilidad de que caiga

Actividad B.

"La actividad consiste en lanzar un dado de 6 caras y debes escoger entre par e impar, ganas si aciertas. ¿Escogerías par o impar para ganar? Y ¿por qué?"

Figura 55. Ejemplo 1. Elección par o impar usando la escala de probabilidad (E4). Situación 2. Fase III.



Eventos	Imposible	Poco probable	Igualmente probable	Muy probable	Seguro
Que caiga un número par			X		
Que caiga un número impar			X		

¿Escogerías par o impar para ganar? Y ¿por qué?

cualquiera, porque los dos son igual mente probable y pueden caer

Se pude apreciar que un 57% de los estudiantes seleccionó el número par y 43% número impar como igualmente probables. Cuando se analiza las justificaciones se observa claramente que solo el 29% (E4 y E6) identificaron que las dos opciones son igualmente probables. A continuación están las tablas que demuestran estos resultados:

Tabla 16. *Porcentaje de respuesta de los estudiantes. Situación 2. Momento 2. Actividad B. Fase III.*

Eventos	Imposible	Poco probable	Igualmente, probable	Muy probable	Seguro
Que caiga un número par	0%	29%	57%	14%	0%
Que caiga un número impar	14%	29%	43%	14%	0%

Tabla 17. *Justificación de respuestas de los estudiantes. Situación 2. Momento 2. Actividad B. Fase III.*

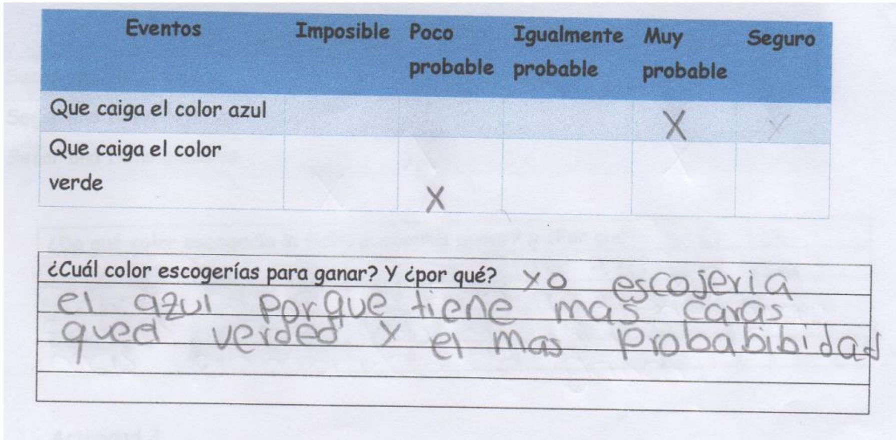
Estudiante						
1	2	3	4	5	6	7
Par porque es el que tiene más probabilidad	Par porque puede que caiga o no puede que caga	Par porque es el que a mí me da suerte	Cualquiera porque los dos son igual mente probable y pueden caer	Par porque puede haber más números pares que impares	Ninguno porque los dos son probables que caigan	Impar porque puede ganar con el impar o perder con el impar

Estas justificaciones demuestran que todavía los estudiantes tienen dificultades para explicar su elección; utilizando como argumentos expresiones como “puede que caiga uno, puede que caiga el otro”.

Actividad C.

“La actividad consiste en lanzar un dado de dos colores verde y azul. El dado tiene dos caras verdes y cuatro azules y debes escoger un color de los dos, ganas si aciertas el color”.

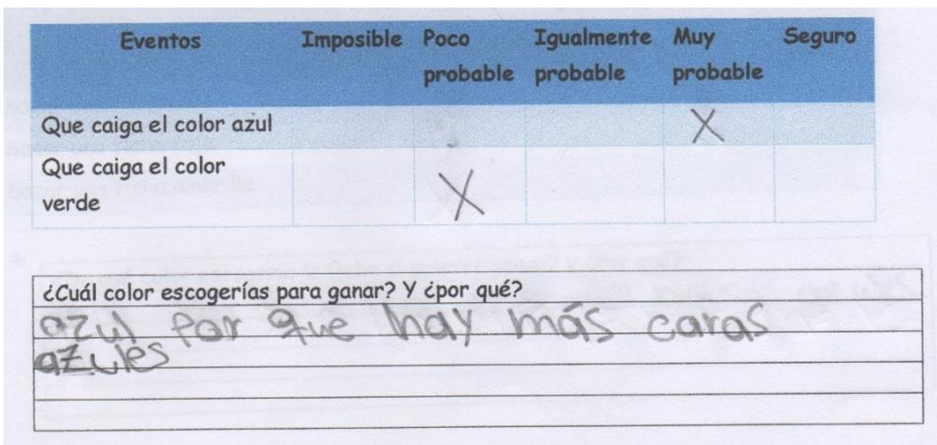
Figura 56. Ejemplo 1. Elección color usando la escala de probabilidad (E1). Situación 2. Fase III.



Eventos	Imposible	Poco probable	Igualmente probable	Muy probable	Seguro
Que caiga el color azul				X	
Que caiga el color verde		X			

¿Cuál color escogerías para ganar? Y ¿por qué? yo escojeria el azul porque tiene mas caras qued verded y el mas Probabibidad

Figura 57. Ejemplo 2. Elección color usando la escala de probabilidad (E6).



Eventos	Imposible	Poco probable	Igualmente probable	Muy probable	Seguro
Que caiga el color azul				X	
Que caiga el color verde		X			

¿Cuál color escogerías para ganar? Y ¿por qué? azul por que hay más caras azules

En esta actividad se puede evidenciar en la respuesta de los estudiantes que el 71% de ellos seleccionaron el color azul como muy probable y 71% el color verde como poco probable. Analizando las respuestas a esta pregunta, se observa que todos los estudiantes seleccionan la opción “azul”, reconociendo que hay más caras de este color. Aquí los estudiantes empiezan a demostrar una mayor apropiación del lenguaje probabilístico y a comparar los casos favorables con los desfavorables.

Tabla 18. *Porcentaje de respuesta de los estudiantes. Situación 2. Momento 2. Actividad C. Fase III.*

Eventos	Imposible	Poco probable	Igualmente probable	Muy probable	Seguro
Que caiga el color azul	0%	14%	14%	71%	0%
Que caiga el color verde	0%	71%	14%	14%	0%

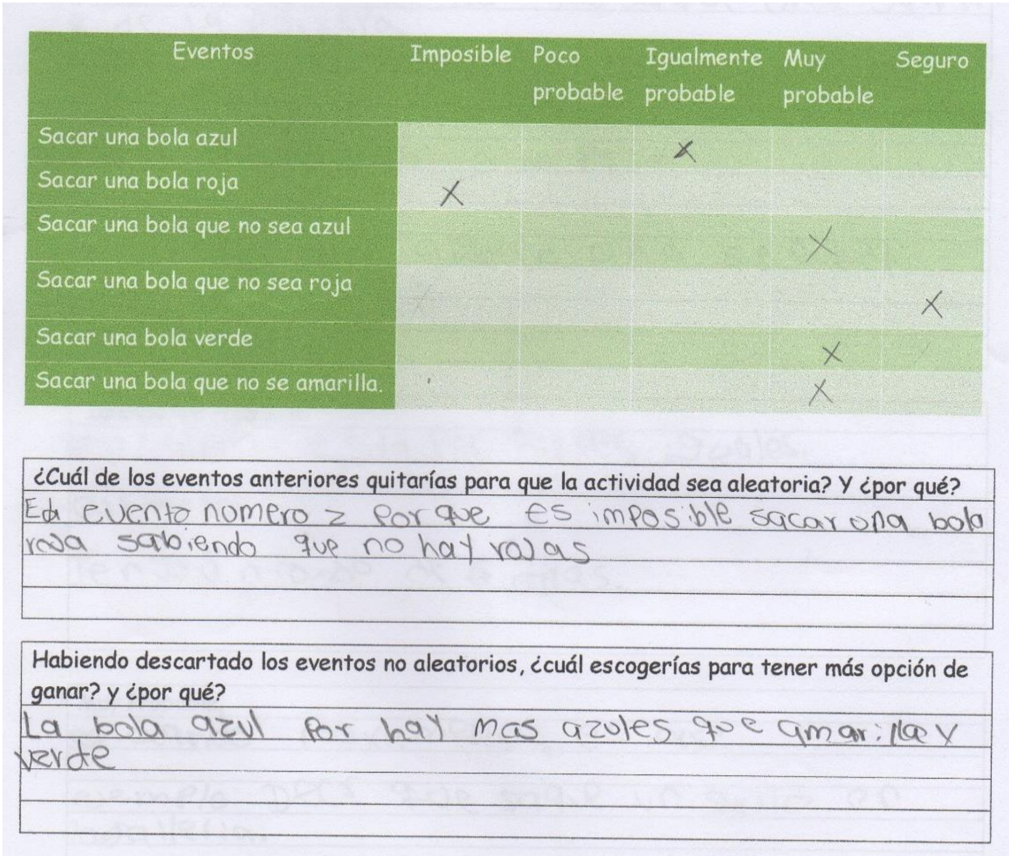
Tabla 19. *Justificación de respuestas de los estudiantes. Situación 2. Momento 2. Actividad C. Fase III.*

Estudiante						
1	2	3	4	5	6	7
El azul porque tiene más caras que el verde y es más probable	El azul porque tiene más caras que el verde y es más posible que caiga	Azul porque es el color más repetido	El azul, porque hay más posibilidades de ganar	Azul porque tiene más caras	El azul porque hay más caras	El azul porque cae más caras que el verde

Momento 3.

"La profesora pide a todos los integrantes del grupo que analicen la siguiente actividad, que ella quiere realizar en la semana de fiesta de la escuela. En una bolsa hay 3 bolas amarillas, 4 azules y 1 verde. Indica con una X en la tabla siguiente el tipo de suceso en la experiencia de sacar una bola de la bolsa y anotar su color":

Figura 58. Ejemplo 1. Elección de eventos usando la escala de probabilidad (E7). Situación 2 Fase III.



Eventos	Imposible	Poco probable	Igualmente probable	Muy probable	Seguro
Sacar una bola azul			X		
Sacar una bola roja	X				
Sacar una bola que no sea azul				X	
Sacar una bola que no sea roja					X
Sacar una bola verde				X	
Sacar una bola que no se amarilla.				X	

¿Cuál de los eventos anteriores quitarías para que la actividad sea aleatoria? Y ¿por qué?

Ed evento nomero 2 por que es imposible sacar una bola roja sabiendo que no hay rojas

Habiendo descartado los eventos no aleatorios, ¿cuál escogerías para tener más opción de ganar? y ¿por qué?

La bola azul por hay mas azules que amarilla y verde

En el siguiente cuadro está el resumen de las respuestas dadas por los estudiantes. Aquí se observa que el 57% de ellos son capaces de identificar que sacar una bola azul es igualmente probable. Al indagar sobre sus respuestas argumentan que las bolas azules son la mitad de todas las bolas. El 100% de los estudiantes son capaces de reconocer que sacar una bola roja es imposible, debido a que no hay bolas rojas dentro de la bolsa. El 29% de los estudiantes reconocen que es igualmente probable sacar una bola que no sea azul y el 71% observan que sacar una bola que no sea roja es un evento seguro, debido a que ninguna de las bolas es roja. Un 43% de los estudiantes afirman que sacar una bola verde es poco probable y un 43% dicen que sacar una bola que no sea amarilla es muy probable. Al revisar la respuesta de los estudiantes, se observa que tienen dificultad en aquellas preguntas que utilizan la palabra “no” en su enunciado. Esto tal vez debido a que el grado de comprensión que requiere una frase negativa es mayor.

Tabla 20. *Porcentaje de respuesta de los estudiantes. Situación 3. Momento 3. Fase III.*

Eventos	Imposible	Poco probable	Igualmente probable	Muy probable	Seguro
Sacar una bola azul	0%	0%	57%	43%	0%
Sacar una bola roja	100%	0%	0%	0%	0%
Sacar una bola que no sea azul	0%	14%	29%	43%	14%
Sacar una bola que no sea roja	14%	0%	0%	14%	71%
Sacar una bola verde	0%	43%	14%	57%	0%
Sacar una bola que no se amarilla.	0%	0%	14%	43%	43%

En la segunda parte de la actividad los estudiantes respondían a las siguientes preguntas: "¿Cuál de los eventos anteriores quitarías para que la actividad sea aleatoria? Y ¿por qué? Habiendo descartado los eventos no aleatorios, ¿cuál escogerías para tener más opción de ganar? y ¿por qué?"

Las respuestas dadas por los estudiantes se resumen en el siguiente cuadro, en el cual se puede observar que el 86% de los estudiantes están de acuerdo que quitaría el evento aleatorio de sacar una bola roja porque este no está entre los colores o porque no es aleatorio. Un 14% de ellos no pudo dar respuesta a esta pregunta. Mientras que un 29% fue capaz de identificar que se debían quitar dos eventos porque no eran aleatorios. Ninguno de estudiantes detectó que el evento con más posibilidad era sacar una bola que no sea amarilla aunque en la tabla anterior el 43% respondió que era un evento muy probable y otro 43% que era un evento seguro. Sin embargo, el 71% de los estudiantes estuvieron de acuerdo en sacar una bola azul porque hay más cantidad de ellas. Todas estas respuestas permiten evidenciar que los estudiantes tienen algunas dificultades para reconocer eventos cuando se combinan diferentes colores en diferentes cantidades.

Tabla 21. *Justificación de respuestas de los estudiantes. Situación 2. Momento 3. Fase III***.**

	Estudiante						
	1	2	3	4	5	6	7
¿Cuál de los eventos anteriores quitarías para que la actividad sea aleatoria? Y ¿por qué?	Quitaría que sacar una bola roja así no es aleatorio	Sacar una bola roja y sacar una bola que no sea roja porque son imposible de sacar	Rojas porque no hay bolas rojas	Sacar una bola que no sea roja porque no está en la los colores	Sacar una bola roja	No contesto	El evento número 2 porque es imposible sacar bolas rojas sabiendo que no hay rojas
Habiendo descartado los eventos no aleatorios, ¿cuál escogerías para tener más opción de ganar? y ¿por qué?	Escogería sacar una bola azul porque tiene más bolas	Sacar bola que no sea amarilla porque es seguro sacarla	Todo de un color porque uno saca el mismo color	Sacar una bola azul, porque hay más posibilidades de ganar	El azul porque es el que tiene fichas la bolsa	No contesto	La bola azul porque hay más azules que amarillas

En la tercera parte de la actividad los estudiantes debían definir con sus propias palabras la escala de probabilidad y dar ejemplos. En las siguientes tablas se compila la respuesta de los estudiantes:

Tabla 22. *Definiciones de los estudiantes concepto de "imposible"*

		Definición de "Imposible"
Estudiante	1	Imposible es que no este
	2	Es que nunca la puede sacar como ejemplo: sacar una bola que no sea roja y no habiendo roja en la bolsa eso es imposible
	3	Es que uno no puede hacerlo ejemplo un cubo de color rojo sacar amarillo
	4	Que no pueda para o suceder por ejemplo tengo 4 bolas todas azules y quiero sacar una roja
	5	Significa cuando tú quieres hacer algo en ese repentino momento es imposible porque le falta o no puede hacerlo
	6	Por ejemplo que haya casitas verdes y azules y le dicen que cuantas rojas hay. Y es que uno no puede hacerlo nunca.
	7	Es cuando es imposible hacer algo sabiendo que no hay ejemplo decirle a un amigo que saque una gallina de la perrera

Tabla 23. *Definiciones de los estudiantes concepto de "poco probable"*

		Definición de "Poco Probable"
Estudiante	1	Es que este muy pocas veces
	2	Es que más o menos puede sacar la ficha como ejemplo. Sacar una bola verde eso es poco probable
	3	Es que uno no sabe un dado azul y rojo
	4	Que puede suceder, pero muy poco ejemplo que se haga un derrumbe
	5	Cuando quiere hacer algo, pero no te dejan es poco probable porque hacer al escondido y lo pillan
	6	Es mucha dificultad sacar algo por ejemplo que haya muchas fichas y es poco probable sacar un color
	7	Es cuando pasa o no pasa ejemplo se puede morir alguien o no se puede

Tabla 24. *Definiciones de los estudiantes concepto de" igualmente probable"*

		Definición de "Igualmente Probable"
Estudiante	1	Es que este la mitad
	2	Es que tiene la mitad de las fichas que son como ejemplo: sacar una bola azul y son 10 azules la mitad de 20 es 10 eso significa igualmente probable
	3	Que uno sabe que puede o no puede por ejemplo un dado rojo y azul uno puede sacar cualquiera
	4	Que todo por mitad ósea igual ejemplo dos colores rojos y azul y dicen que los dos son poco probables
	5	Que puede hacer las cosas con permiso y uno está seguro de que lo dejan
	6	Es la mitad por ejemplo que hayan una cantidad de 20 y es la mitad
	7	Es cuando esta por partes iguales ejemplo tengo un dado de 6 caras

Tabla 25. *Definiciones de los estudiantes concepto de" muy probable"*

		Definición de Muy Probable
Estudiante	1	Es que puede estar muy probable muchas veces
	2	Es que también tiene hartas fichas como ejemplo sacar una bola blanca y así es el significado de muy probable
	3	Que estamos casi seguros por ejemplo un dado azul y un dado rojo
	4	Que es mayor que la mitad ejemplo tengo 12 canicas y quiero sacar 7
	5	Que está totalmente confiado de que lo van a dejar hacer y con permiso
	6	Es que hayan 10 azules 6 verdes y 4 rojas y es muy probable que saque azules
	7	Es cuando más o menos es así ejemplo decir que saque un gallo en la galería

Tabla 26. *Definiciones de los estudiantes concepto de "seguro"*

		Definición de Seguro
Estudiante	1	Es que tiene que estar y tiene que estar todo pintado como un dado el dado tiene que estar todo pintado
	2	Es que tiene hartas fichas tiene por igual como ejemplo sacar una bola que no sea amarilla, pero queda otros colores y así es como se dice seguro.
	3	Es lo que es cierto por ejemplo un dado todo rojo uno está seguro que no va a ganar
	4	Que eso pasará de verdad ejemplo tengo 10 perros negros y quiero sacar uno negro eso es seguro
	5	Cuando sabes y estas seguro, pero con el permiso de hacer alguna cosa y nada te lo va a quitar
	6	Por ejemplo que hayan 10 rojas y es seguro
	7	Es cuando yo sé que va a pasar ejemplo que lo que diga a un primo que saque un perro de la perra

Al final de la situación los estudiantes construyeron colectivamente una definición de los términos con base en sus respuestas, con el objetivo de crear un lenguaje común y aproximarse a la institucionalizaron de los términos. Estas son las definiciones:

Imposible: Algo que nunca puede pasar.

Poco probable: cuando los casos favorables son menos de la mitad.

Igualmente probable: la mitad de los casos favorables.

Muy probable: Los casos favorables son mayor que la mitad.

Seguro: que el total sea igual a los casos favorables. Algo que siempre pasa.

6.3.3. Situación 3: Probabilidad como razón.

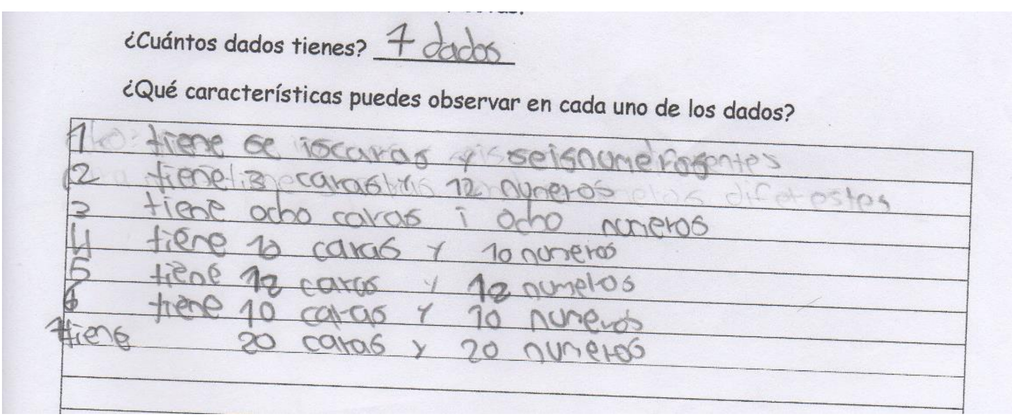
El objetivo de esta situación es calcular de forma correcta la probabilidad en eventos simples. En ella se sigue la secuencia de la selección de los juegos a implementar en las fiestas de la escuela. Para esto, se divide en cuatro momentos; el primero se diseñó para que el estudiante reconociera las características de material didáctico, que en este caso son dados, los cuales tienen diferentes formas y diferente número de caras (set de 7 dados). En el segundo momento, se pretendía que el estudiante identificara como estaban numerados los dados. Los primeros dos momentos estaban organizados para que el estudiante hiciera un acercamiento al material manipulativo y le facilitara la realización de las actividades de los siguientes momentos. En el momento tres se hace la introducción de la regla de Laplace, categoría 3 (cociente entre casos favorables y casos posibles). Y, en el último momento se da una serie de eventos relacionados con los dados y ellos deben analizar la probabilidad que tiene en cada uno de los 7 dados (Anexo 6).

Momento 1.

Figura 59. Imagen. Momento 1. Situación 4. Fase III.

"Se ha tomado la decisión de que una de las actividades recreativas que se desarrollaran durante la semana de fiesta de la escuela es el juego con dados; para ello contamos con dados de diferentes formas, cantidad de caras y numeración. Debemos analizar cada uno de las características de los dados, que nos sirva para para que el juego sea aleatorio, y así poder colocar esta actividad en práctica durante la semana de fiestas".

Figura 60. Ejemplo 1. Características dados (E5). Situación 3. Fase III.

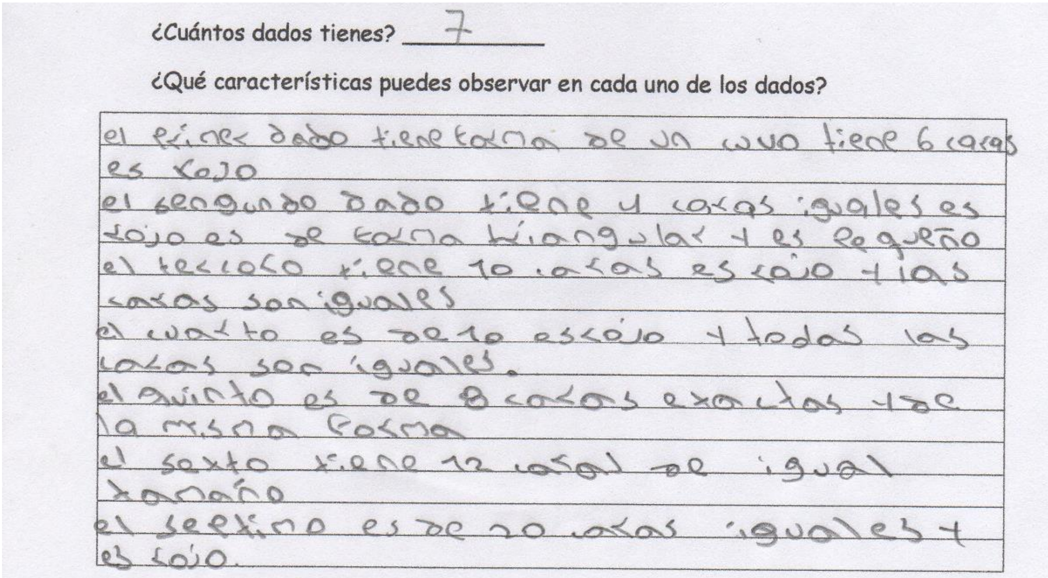


¿Cuántos dados tienes? 7 dados

¿Qué características puedes observar en cada uno de los dados?

1 tiene 6e iscaras y seisnumeros
2 tiene 12 caras 12 numeros
3 tiene ocho caras i ocho nunеros
4 tiene 10 caras y 10 numeros
5 tiene 12 caras y 12 numeros
6 tiene 10 caras y 10 numeros
7 tiene 20 caras y 20 numeros

Figura 61. Ejemplo 2. Características dados (E4). Situación 3. Fase III.

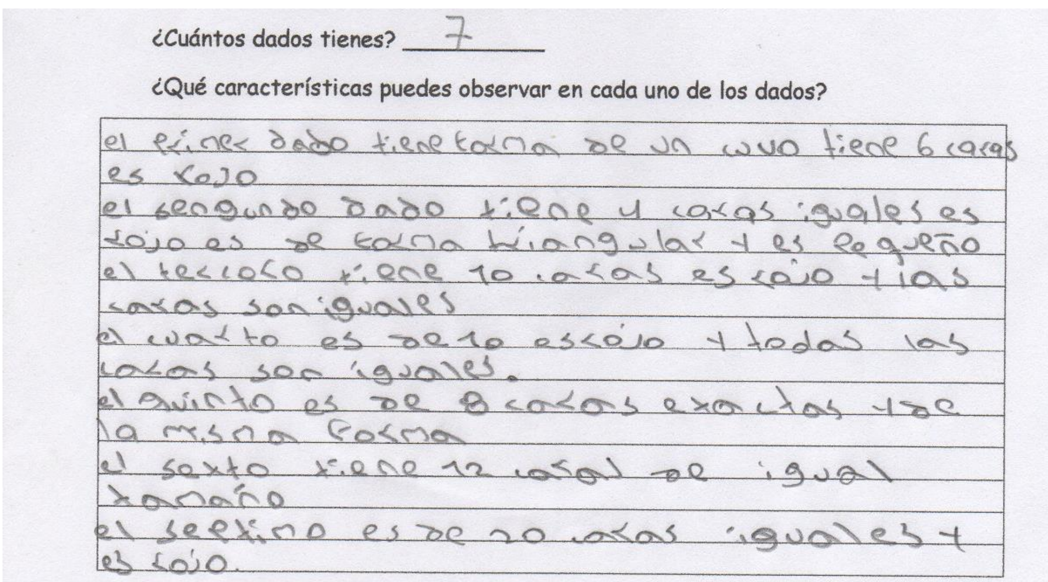


¿Cuántos dados tienes? 7

¿Qué características puedes observar en cada uno de los dados?

el primer dado tiene forma de un cubo tiene 6 caras
es rojo
el segundo dado tiene 4 caras iguales es
rojo es de forma triangular y es pequeño
el tercero tiene 10 caras es rojo y las
caras son iguales
el cuarto es de 10 es rojo y todas las
caras son iguales.
el quinto es de 8 caras exactas y de
la misma forma
el sexto tiene 12 caras de igual
tamaño
el septimo es de 20 caras iguales y
es rojo.

Figura 62. Ejemplo 3 Características dados (E2). Situación 3. Fase III.



¿Cuántos dados tienes? 7

¿Qué características puedes observar en cada uno de los dados?

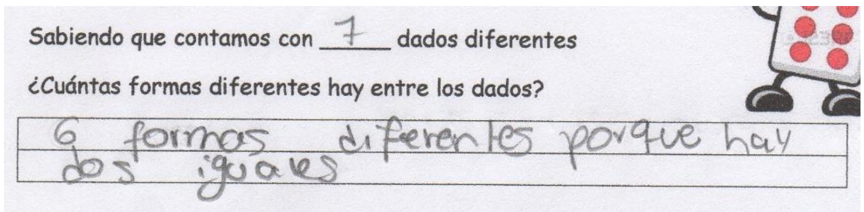
el primer dado tiene forma de un cubo tiene 6 caras
es rojo
el segundo dado tiene 4 caras iguales es
rojo es de forma triangular y es pequeño
el tercero tiene 10 caras es rojo y las
caras son iguales
el cuarto es de 10 es rojo y todas las
caras son iguales.
el quinto es de 8 caras exactas y de
la misma forma
el sexto tiene 12 caras de igual
tamaño
el septimo es de 20 caras iguales y
es rojo.

Las anteriores son tres respuestas de los estudiantes en las que se muestra que ellos lograron identificar que los dados eran diferentes en forma y número de caras. Este era el objetivo de este momento. En su totalidad todos los 7 estudiantes lograron realizarlo correctamente.

Momento 2.

"Después de haber analizado las características de los dados, debes responder a las siguientes preguntas".

Figura 63. Ejemplo 1. Formas de los dados (E6). Situación 3. Fase III.

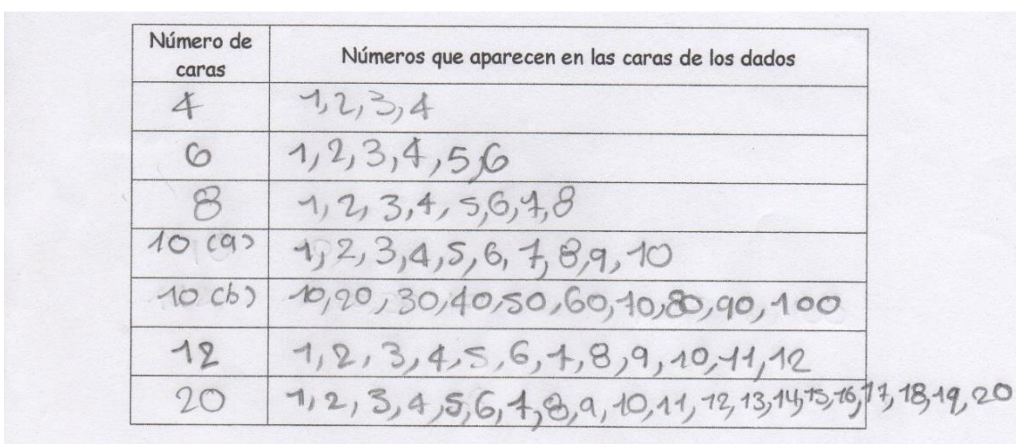

Sabiendo que contamos con 7 dados diferentes

¿Cuántas formas diferentes hay entre los dados?

6 formas diferentes porque hay dos iguales

"Para analizar más a fondo estas características vamos a llenar la siguiente tabla. En la primera columna vas a responder la pregunta ¿Cuántas caras tiene caras tiene cada dado?, y las vas ordenar de menor a mayor. En la segunda columna vas a responder ¿qué números aparecen en cada cara de los dados?, colocando tu respuesta en orden".

Figura 64. Ejemplo 2. Caras y números de los dados (E6). Situación 3. Fase III.



Número de caras	Números que aparecen en las caras de los dados
4	1,2,3,4
6	1,2,3,4,5,6
8	1,2,3,4,5,6,7,8
10 (a)	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10
10 (b)	10,20,30,40,50,60,70,80,90,100
12	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12
20	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20

El objetivo de este momento fue que los estudiantes se percataran de la numeración de los datos y que identificaran que había dos dados con el mismo número de caras pero que tenían diferente numeración. A estos dados se les denominó 10A y 10B, para diferenciarlos en las actividades posteriores. Los estudiantes no tuvieron dificultades en realizar esta actividad.

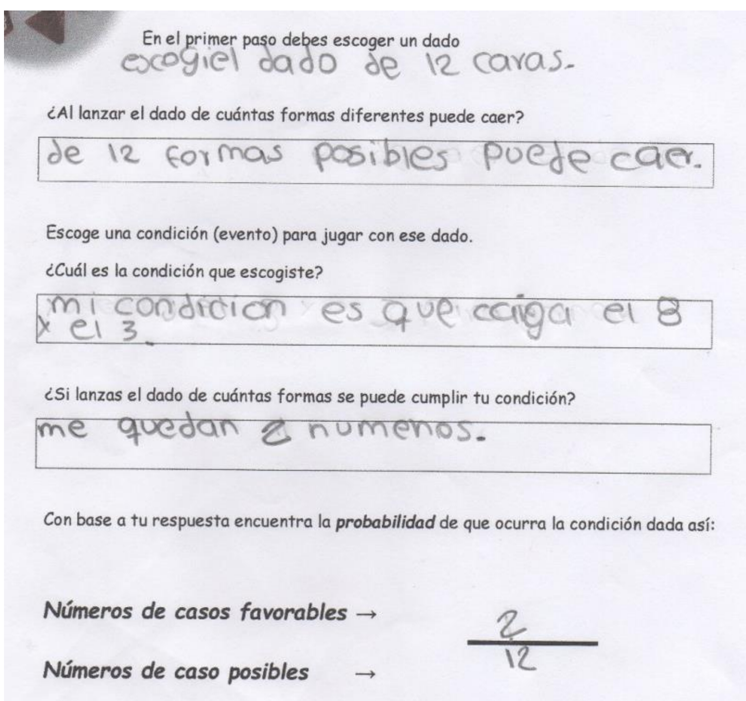
Aunque los momentos anteriores no son muy relevantes respecto a sí se maneja un concepto matemático, se considera importante en esta investigación que los estudiantes manipulen y se familiaricen con el material, para lograr el objetivo general de toda la situación. Es decir, era necesaria una apropiación del material para realizar las actividades del momento 3 y 4.

Momento 3.

Figura 65.Imagen. Momento 3. Situación 3. Fase III.

"Ahora que conocemos bien los dados que vamos a utilizar, debemos mirar las condiciones para jugar o en otras palabras los eventos aleatorios, para colocar las reglas de juego".

Figura 66. Ejemplo 1. Respuesta Momento 3 (E1). Situación 3.Fase III.



En el primer paso debes escoger un dado

escogiel dado de 12 caras.

¿Al lanzar el dado de cuántas formas diferentes puede caer?

de 12 formas posibles puede caer.

Escoge una condición (evento) para jugar con ese dado.

¿Cuál es la condición que escogiste?

mi condicion es que caiga el 8 y el 3.

¿Si lanzas el dado de cuántas formas se puede cumplir tu condición?

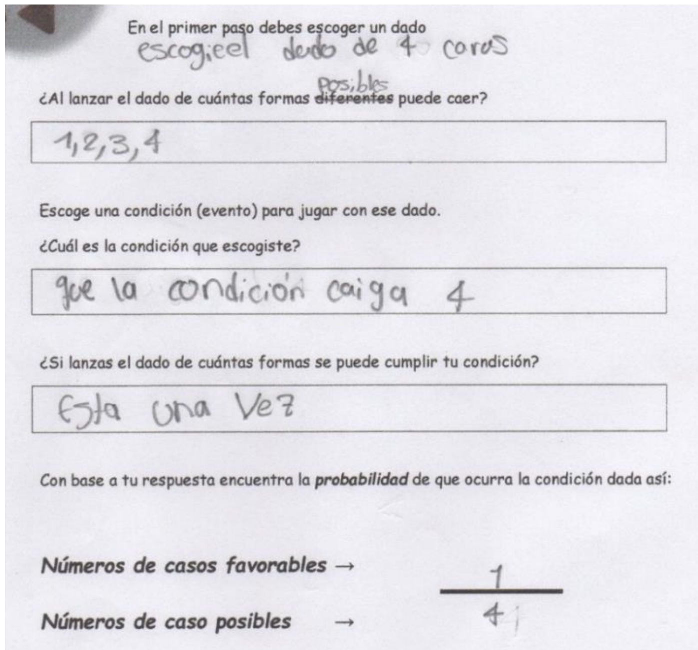
me quedan 2 numenos.

Con base a tu respuesta encuentra la ***probabilidad*** de que ocurra la condición dada así:

Números de casos favorables → $\frac{2}{12}$

Números de caso posibles →

Figura 67. Ejemplo 2. Respuestas Momento 3 (E2). Situación 3. Fase III.



En el primer paso debes escoger un dado

escogi eel dado de 4 caras

¿Al lanzar el dado de cuántas formas ~~diferentes~~ posibles puede caer?

1,2,3,4

Escoge una condición (evento) para jugar con ese dado.

¿Cuál es la condición que escogiste?

que la condición caiga 4

¿Si lanzas el dado de cuántas formas se puede cumplir tu condición?

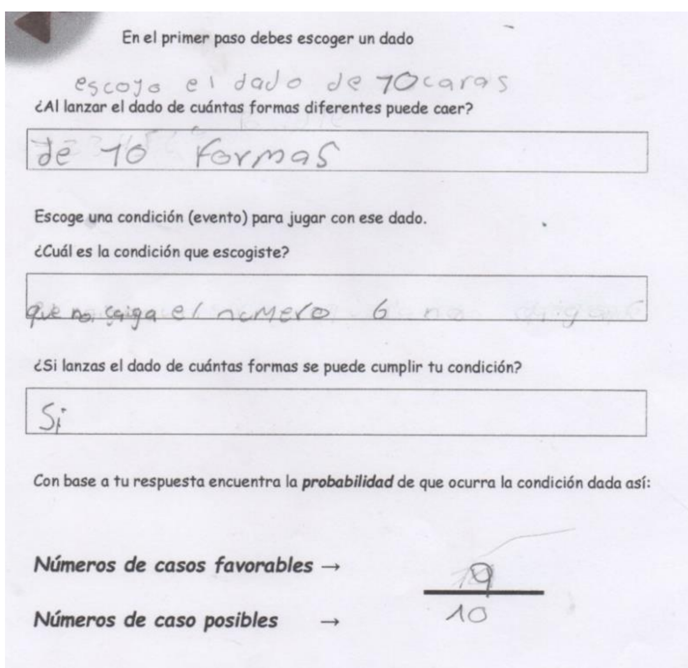
Esta una Vez

Con base a tu respuesta encuentra la ***probabilidad*** de que ocurra la condición dada así:

Números de casos favorables → 1

Números de caso posibles → 4

Figura 68. Ejemplo 3. Respuestas momento 3 (E3). Situación 3. Fase III.



En el primer paso debes escoger un dado

escoja el dado de 10 caras

¿Al lanzar el dado de cuántas formas diferentes puede caer?

de 10 formas

Escoge una condición (evento) para jugar con ese dado.

¿Cuál es la condición que escogiste?

que no caiga el numero 6 no caiga

¿Si lanzas el dado de cuántas formas se puede cumplir tu condición?

Si

Con base a tu respuesta encuentra la ***probabilidad*** de que ocurra la condición dada así:

Números de casos favorables → 9

Números de caso posibles → 10

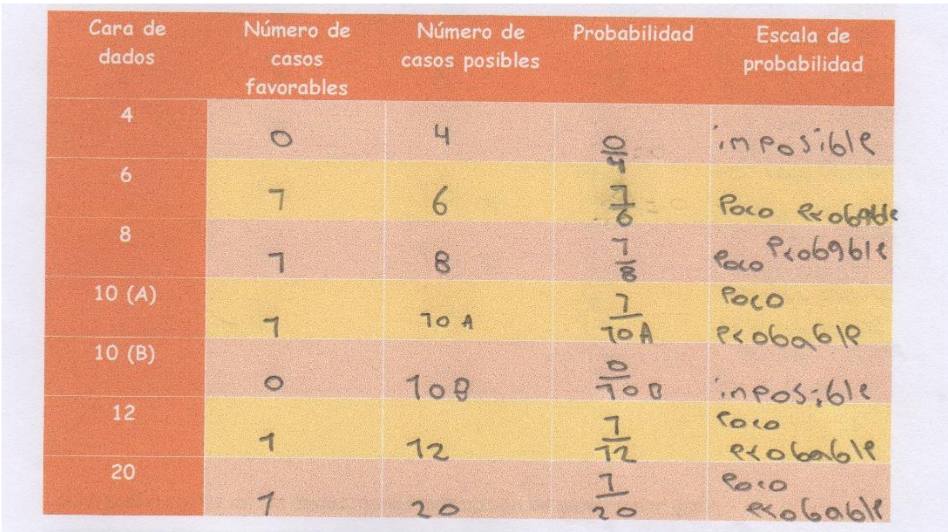
Las anteriores son una muestra de las diferentes respuestas que dieron los estudiantes. Unos que escogían un solo número, otros que seleccionaban eventos compuestas (es decir, dos números), y unos que eligieron una condición negativa (que no caiga un número determinado). En general todos los estudiantes realizaron esta actividad correctamente porque representaron la probabilidad como cociente (número de casos favorables y número de casos posibles).

Momento 4.

"Ya que sabes calcular la probabilidad de un evento, encuentra la probabilidad de los siguientes eventos que propone la profesora para jugar con los dados".

a. "El evento en cada caso consiste en que al lanzar el dado caiga 5"

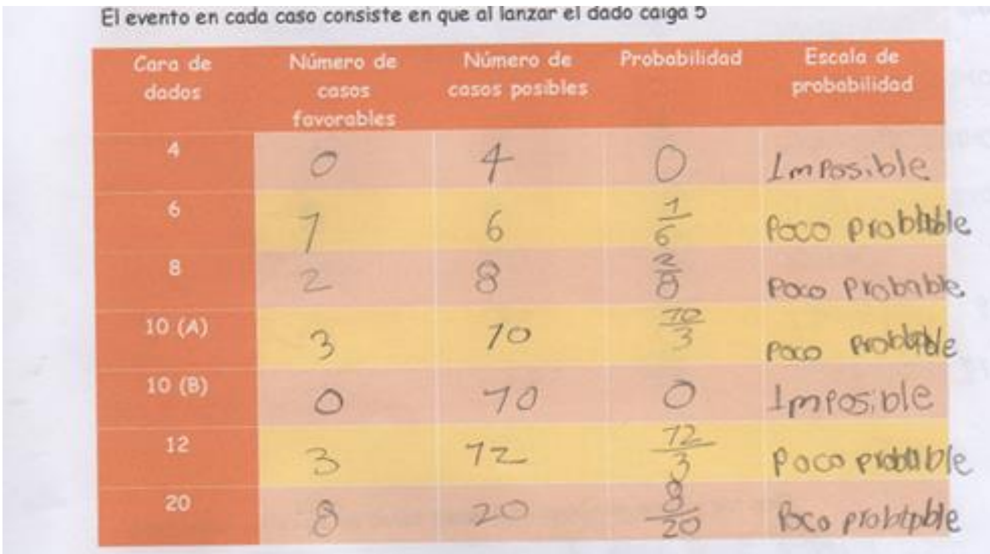
Figura 69. Ejemplo 1. Evento: caída del #5 al lanzar dados (E4) Situación 3. Fase III.



Cara de dados	Número de casos favorables	Número de casos posibles	Probabilidad	Escala de probabilidad
4	0	4	$\frac{0}{4}$	imposible
6	1	6	$\frac{1}{6}$	Poco probable
8	1	8	$\frac{1}{8}$	Poco probable
10 (A)	1	10 A	$\frac{1}{10A}$	Poco probable
10 (B)	0	10B	$\frac{0}{10B}$	imposible
12	1	12	$\frac{1}{12}$	Poco probable
20	1	20	$\frac{1}{20}$	Poco probable

En esta actividad se observa que la totalidad de los estudiantes fueron capaces de reconocer que los casos posibles correspondían al número de caras de cada dado (las diferentes formas de caer). Con respecto a la primera columna, el 71% no tuvo ninguna dificultad en reconocer el número de casos favorables con respecto a cada dado. El estudiante E1 se equivocó en el número de casos favorables del dado 10B colocando el número "1" y en el dado de 12 caras colocando el número "2"; pero al llenar la columna de probabilidad y escala de probabilidad lo hizo correctamente, con relación a los valores consignados por él. El estudiante E7 presentó dificultad en las columnas "número de casos favorables" y "probabilidad" como se aprecia en la figura 70.

Figura 70. Ejemplo 2. Evento: caída del #5 al lanzar dados (E7). Situación 3. Fase III.



El evento en cada caso consiste en que al lanzar el dado caiga 5

Cara de dados	Número de casos favorables	Número de casos posibles	Probabilidad	Escala de probabilidad
4	0	4	0	Imposible
6	7	6	$\frac{1}{6}$	Poco probable
8	2	8	$\frac{2}{8}$	Poco Probable
10 (A)	3	10	$\frac{10}{3}$	Poco probable
10 (B)	0	10	0	Imposible
12	3	12	$\frac{12}{3}$	Poco probable
20	8	20	$\frac{8}{20}$	Poco probable

Al preguntarle sobre su respuesta el estudiante afirmó que él pensaba que era números de 4 en 4, y que no se había dado cuenta que era el número 5. Respecto al cambio de los valores en la columna de "probabilidad" se notó confundido y no dio una respuesta clara; pero lo que se puede evidenciar es el manejo del lenguaje probabilístico de este estudiante que diferenció los eventos imposibles y poco posibles correctamente.

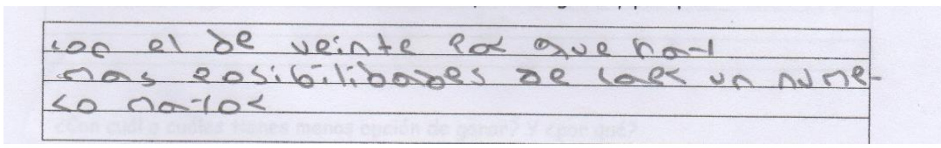
El estudiante E3 que, aunque identifico que el dado 10B no tenía el número 5, es decir, casos favorables, no tuvo esto en cuenta al momento de encontrar la probabilidad colocando $\frac{1}{10}$, y dando como resultado en la columna de "escala de probabilidad" un "poco probable", que tiene coherencia con el valor dado.

El estudiante E5 pese a que fue capaz de detectar que el número de casos posibles para el dado 10B es 0 y que la probabilidad del evento dado es $\frac{0}{10}$, lo clasificó como un evento poco probable.

Las demás respuestas de los estudiantes fueron correctas y se nota una buena apropiación del lenguaje probabilístico con 97% de respuestas correctas de acuerdo a los valores consignados por ellos.

Luego, se realizaba la pregunta: “¿Con cuál o cuáles de los dados tienes más opción de ganar y por qué?”

Figura 71. Ejemplo 1. A. Dados con mayor opción (E4). Situación 3. Fase III.


con el de veinte por que hay
mas posibilidades de caer un nume-
ro mayor

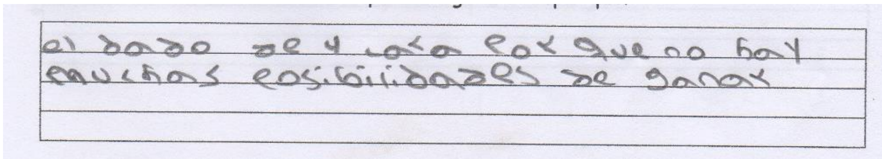
Como era de esperarse los estudiantes tienen confusión al responder esta pregunta, se nota claramente que no tienen los pre-saberes necesarios para hacer la comparación entre las razones y debido a eso no puede dar una respuesta apropiada. Es por eso que justifican sus respuestas guiándose por la cantidad de caras, pensando que entre más caras hay mayor probabilidad; tal como lo hicieron el 57 % al escoger el dado de 20 caras. Las respuestas dada por ellos se pueden apreciar a continuación.

Tabla 27. *Justificación de las respuestas de los estudiantes. Situación 3. Momento 4A. Fase III.*

Estudiantes						
1	2	3	4	5	6	7
Con el de 20 caras porque tiene más caras que los otros	Con el 10b porque tiene diez caras y es más bueno para ganar	Con el de 20 caras porque tiene más números	Con el de veinte porque hay más posibilidades de caer un número mayor	10a porque es un número muy grande	10 a porque es poco probable	Con el de 20 caras porque yo escojo un número y me podría caer

Y la última pregunta era: “¿Con cuál o cuáles tienes menos opción de ganar? Y ¿por qué?”

Figura 72. Ejemplo 1. A. Dados con menor opción (E4). Situación 3. Fase III.


el dado de 4 cara por que no hay
muchas posibilidades de ganar

Las respuestas dadas coinciden que es el dado de 4 caras. Aunque la mayoría de ellos justifican su respuesta porque es "imposible", parece que el estudiante E1 lo asocia con el número de caras. El estudiante E7 que, aunque al llenar la tabla fue capaz de identificar que era un evento imposible, justifica su respuesta con "poco probable".

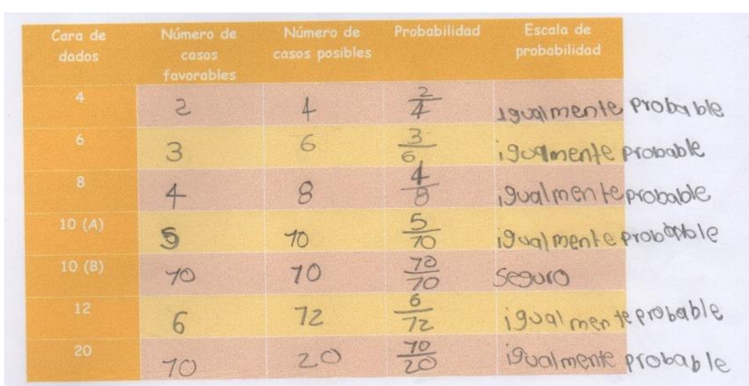
Tabla 28. *Justificación 2 de las respuestas de los estudiantes. Situación 3. Momento 4A. Fase III.*

Estudiantes						
1	2	3	4	5	6	7
Con el de 4 caras porque tiene menos caras	Con el 4 porque el cinco no puede estar	Con el de 4 caras porque es imposible	El dado de 4 caras porque no hay muchas posibilidades de ganar	Con el 4 porque es imposible	4 porque es imposible	Con el de 4 caras porque es poco probable que caiga

Además, no tuvieron encuentra que habían dos dados que hacían que el evento fuera "imposible"; solo se identificó uno de ellos.

b. "El evento en este caso consiste en que al lanzar el dado caiga un número par"

Figura 73**.** Ejemplo 1. Evento: caída número par al lanzar dados (E7). Situación 3. Fase III.

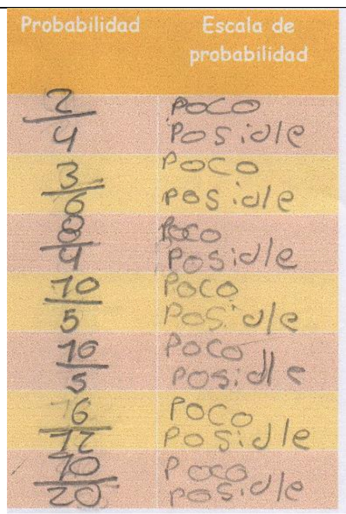
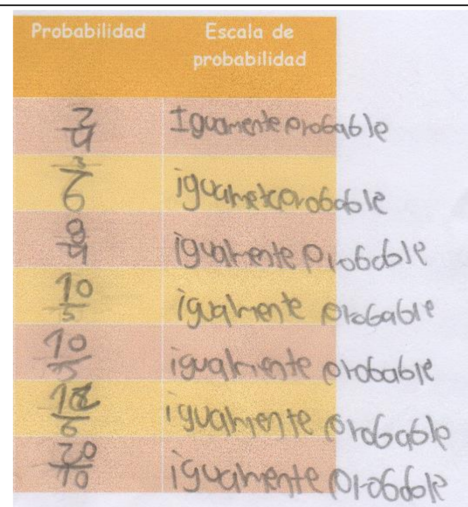


Cara de dados	Número de casos favorables	Número de casos posibles	Probabilidad	Escala de probabilidad
4	2	4	2/4	igualmente probable
6	3	6	3/6	igualmente probable
8	4	8	4/8	igualmente probable
10 (A)	5	10	5/10	igualmente probable
10 (B)	10	10	10/10	seguro
12	6	12	6/12	igualmente probable
20	10	20	10/20	igualmente probable

Al observar los resultados de los estudiantes en la columna de “casos favorables”, se observa que el E1 colocó que el dado 10A tiene 10 números pares y los E2, E3 y E5 dicen que 10B tiene 5 números pares. Aquí se nota confusión, ya que para los dados de 10 caras ellos afirman que tienen el mismo número de pares. El estudiante E6, para el dado 10B dice que tiene 50 números pares ya que para encontrar la cantidad de números pares de cada dado él dividía por dos el número mayor que aparecía en el dado (en este caso el número 100), y no tuvo en cuenta los números en ellos.

En la columna de “casos posibles” no se presentó ninguna inconsistencia en las respuestas. Ahora bien, analizando la columna de “probabilidad”, el estudiante E1, a pesar que afirma que ambos dados de 10 caras tienen 10 números pares, al expresar el cociente coloca en los dos casos $\frac{10}{5}$. En el caso del E3 y E5 también presentan en algunos casos confusión a la hora de expresar la probabilidad como cocientes como se aprecia en la figura 74, invirtiendo los términos de los cocientes.

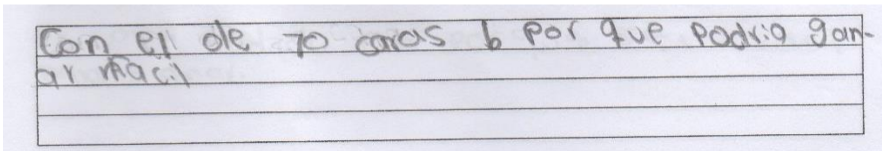
Figura 74. Comparación respuestas estudiante E3 y E5. Caída número par al lanzar dados. Situación 3. Fase III.

<table>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Respuestas E3</td><td>Respuestas E5</td></tr>
</table>

Con respecto a la columna de la “escala de probabilidad”, se analiza la información de acuerdo a los valores dados por los estudiantes en la columna de “probabilidad”, debido que interesa más el manejo que dan al comparar el resultado con el lenguaje probabilístico. Se observa que el E3 tiene dificultad para identificar con respecto a sus respuestas los casos que son igualmente posibles, y el E4 no identifica que en el caso del dado 10B es un evento seguro, confundiéndolo con igualmente probable.

"¿Con cuál o cuáles de los dados tienes más opción de ganar y por qué?"

Figura 75. Ejemplo 1. B. Dados con mayor opción (E7). Situación 3. Fase III.


Con el de 10 caras b por que podria gan-
ar facil

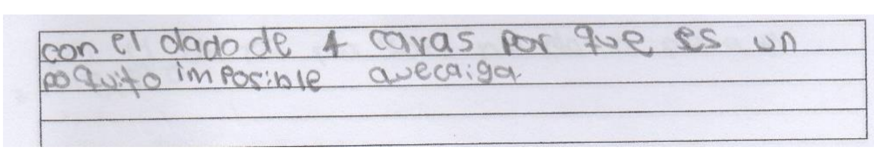
Con respecto a esta pregunta se aprecia que solo el E7 identifica que se debe escoger el dado 10B. Los demás estudiantes seleccionan el dado de 20 caras, su elección se basa a que tiene mayor cantidad de caras, como se parecía en la tabla siguiente.

Tabla 29. *Justificación de las respuestas de los estudiantes. Situación 3. Momento 4B. Fase III*

	Estudiantes						
	1	2	3	4	5	6	7
¿Con cuál o cuáles de los dados tienes más opción de ganar y por qué?	Con el que tenga más caras porque así tiene más puntaje	El 20 porque es más posible	Con el de 20 caras porque es el que tiene mas	El de 20 porque hay más posibilidades de caer un número mayor	Con el de 20 porque es el número mayor y casos no posible	20 porque es igualmente probable	Con el 10b caras porque podría ganar fácil

"¿Con cuál o cuáles tienes menos opción de ganar? Y ¿por qué?".

Figura 76. Ejemplo 1. B. Dados con menor opción (E7). Situación 3. Fase III.


con el dado de 4 caras por que es un
poquito imposible quecaiga

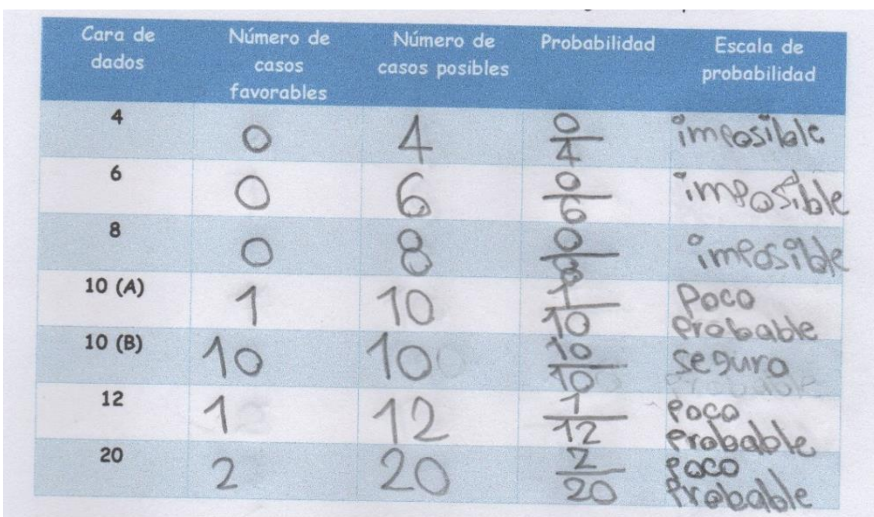
Todos los estudiantes afirman que el dado que tiene menos opción de ganar es el de 4, debido a que tiene menor cantidad de caras. Los estudiantes no identifican que deben realizar una comparación entre las razones para responder esta pregunta, solo lo asocian al número de caras: a menor cantidad menor opción de ganar.

Tabla 30. *Justificación 2 de las respuestas de los estudiantes. Situación 3. Momento 4B. Fase III*

	Estudiantes						
	1	2	3	4	5	6	7
¿Con cuál o cuáles tienes menos opción de ganar? Y ¿por qué?	Con el de 4 caras poquitas por que cae más poquito puntaje	Con el 4 porque sería difícil para ganar	El de 4 caras porque es el de menos caras	El dado de 4 caras porque tiene números muy pequeños	Con el 4	4 porque es igualmente probable	Con el dado de 4 caras porque es un poquito imposible que caiga

c. “El evento en este caso consiste en que al lanzar el dado caiga un múltiplo de 10”.

Figura 77. Ejemplo 1. Evento: caída múltiplo de 10 al lanzar dados (E8). Situación 3. Fase III.

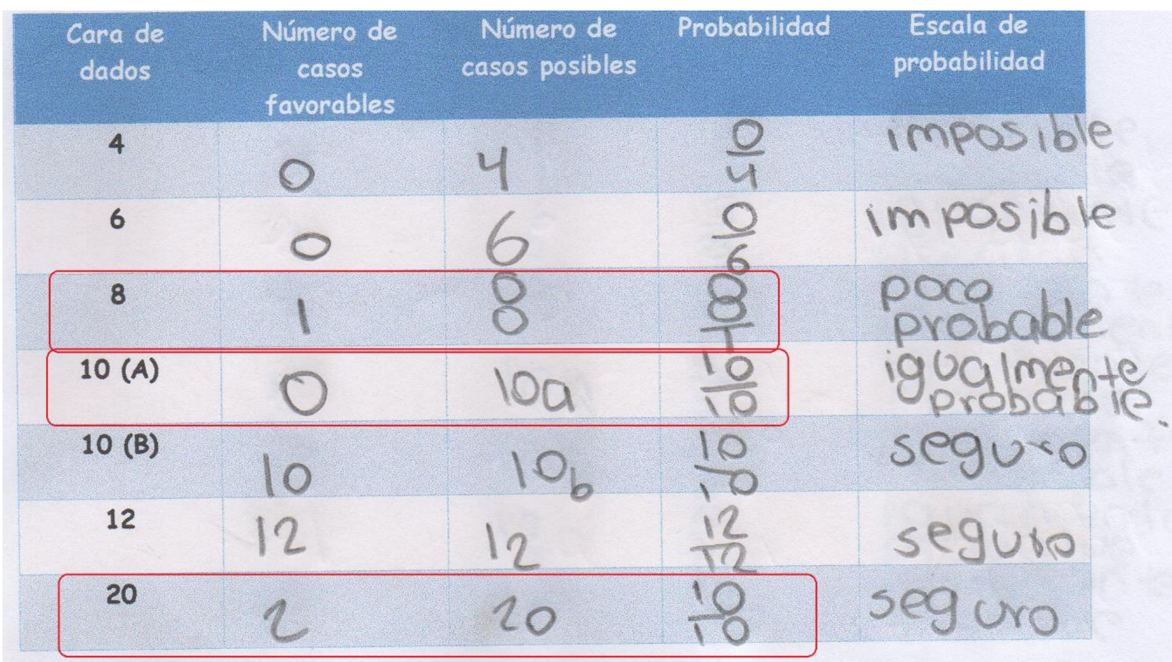


Cara de dados	Número de casos favorables	Número de casos posibles	Probabilidad	Escala de probabilidad
4	0	4	$\frac{0}{4}$	imposible
6	0	6	$\frac{0}{6}$	imposible
8	0	8	$\frac{0}{8}$	imposible
10 (A)	1	10	$\frac{1}{10}$	Poco probable
10 (B)	10	10	$\frac{10}{10}$	seguro
12	1	12	$\frac{1}{12}$	Poco probable
20	2	20	$\frac{2}{20}$	Poco probable

Con respecto a la columna de números de “casos favorables”, se aprecia que el estudiante E1 considera que el dado de 12 caras tiene 12 múltiplos de 10. El estudiante E2 considera que en el dado 10B hay 100 múltiplos de 10, debido a que el número mayor del dado es 100, es decir, no identifica que los números van de 10 en 10 y que cada uno de ellos es un múltiplo de 10. Los estudiantes E4 y E7 no reconocieron que el dado de 12 caras tuviera un múltiplo de 10 y E5 cree que en los dados de 12 y 20 caras no hay múltiplos de 10. Al indagar sobre estos resultados los estudiantes reconocen no tener muy claro lo que son múltiplos de un número.

Con respecto a la columna de "probabilidad", el estudiante E1 presenta tres inconsistencias en sus respuestas, dos de ellas no tienen en cuenta los casos favorables; en el caso del dado de 8 caras afirma no tener múltiplos de 10, pero para encontrar el cociente de la probabilidad afirma que es $\frac{10}{10}$, para el caso del dado del veinte caras dice tener dos casos favorables, y al dar la probabilidad de este evento coloca $\frac{10}{10}$, y en caso del dado de 8 caras invierte los términos del cociente.

Figura 78. Ejemplo 2. Evento: caída número par al lanzar dados (E1). Situación 3. Fase III.



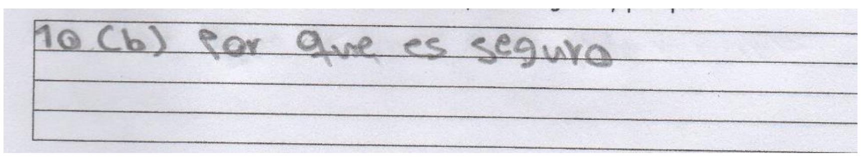
Cara de dados	Número de casos favorables	Número de casos posibles	Probabilidad	Escala de probabilidad
4	0	4	$\frac{0}{4}$	imposible
6	0	6	$\frac{0}{6}$	imposible
8	1	8	$\frac{8}{1}$	poco probable
10 (A)	0	10a	$\frac{10}{10}$	igualmente probable
10 (B)	10	10b	$\frac{10}{10}$	seguro
12	12	12	$\frac{12}{12}$	seguro
20	2	20	$\frac{10}{10}$	seguro

Lo anterior se repite con otros estudiantes. El estudiante E2 invierte el cociente del dado 10B. E3 y E4 no tienen en cuenta los datos de los números favorables; para el caso de E3 sobre el dado 10A, afirma que colocó "0" en vez de "1" porque los datos anteriores eran cero, y siguió la secuencia; y para el caso de E4, en el mismo dado coloca “10” en vez de “1” que era lo que tenía como casos favorables.

En la columna de “escala de probabilidad” se observa confusión en los estudiantes al afirmar que $\frac{10}{10}$ es un evento igualmente probable. E2 no diferencia que $\frac{1}{12}$ es poco probable y afirma que es muy probable; para E3 las probabilidades $\frac{0}{10}, \frac{10}{10}, \frac{1}{10}$ y $\frac{2}{20}$ son muy probables y E5 no reconoció los eventos imposibles.

¿Con cuál o cuáles de los dados tienes más opción de ganar y por qué?

Figura 79. Ejemplo 1. C. Dados con mayor opción (E6). Situación 3. Fase III.



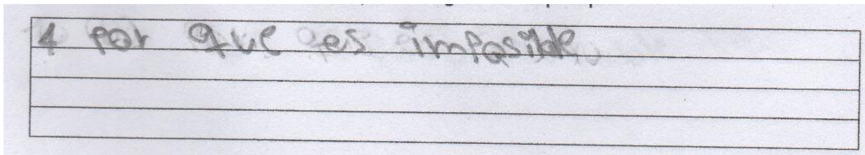
Cuatro de los estudiantes identifican que el dado 10B es el que tiene más opción de ganar debido a que es un evento seguro, o al menos tiene más opciones. Los demás siguen asociando que entre más caras tiene el dado, más opciones de ganar existen.

Tabla 31. *Justificación respuestas de los estudiantes. Situación 3. Respuesta Momento 4C. Fase III.*

	Estudiantes						
	1	2	3	4	5	6	7
¿Con cuál o cuáles de los dados tienes más opción de ganar y por qué?	El de 20 caras porque tiene más posibilidades de ganar	Con el 10 b porque diez esta en 100 veces está el múltiplo de diez	Las 20 caras porque es el que tiene más caras	El dado de 20 porque hay más posibilidades de ganar	10b por que es seguro	10 b porque es seguro	Escoger el 10b porque sería fácil para ganar

¿Con cuál o cuáles tienes menos opción de ganar? Y ¿por qué?

Figura 80. Ejemplo 1. C. Dados con menor opción (E6). Situación 3. Fase III.



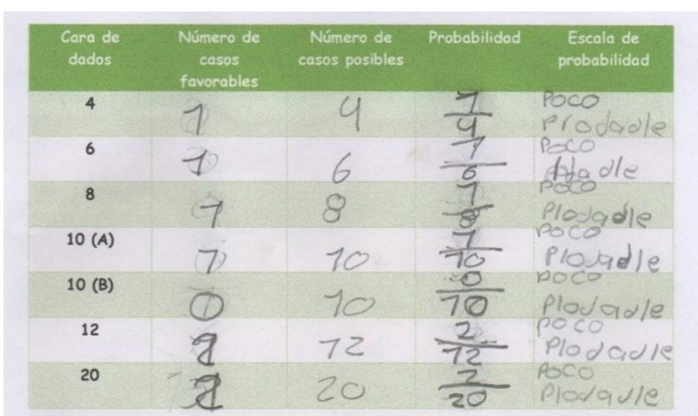
Los estudiantes E2 y E3 identifican que los dados 4, 6 y 8 no tienen opciones de ganar, ya que son eventos imposibles. El estudiante E7 selecciona el 12, ya que inicialmente él dice que no tiene múltiplos; los demás seleccionan el 4, pero su justificación sigue siendo porque tiene menos caras.

Tabla 32. *Justificación respuestas de los estudiantes. Situación 3. Respuesta Momento 4C. Fase III.*

	Estudiantes						
	1	2	3	4	5	6	7
¿Con cuál o cuáles tienes menos opción de ganar? Y ¿por qué?	Con las cuatro caras porque es de menos puntaje	Con 4,6 y 8 porque el diez no puede caer en el diez	4,6 y 8 porque son los que son imposible que suceda	El de 4 cara porque tiene números pequeños	Con el cuatro por poco probable	4 porque es imposible	Con el 12 porque no daría para el múltiplo

d. “El evento consiste en que al lanzar el dado caiga un número terminado en 2”.

Figura 81. Ejemplo 1. Evento: caída número terminado en dos al lanzar dados (E3) Situación 3. Fase III.

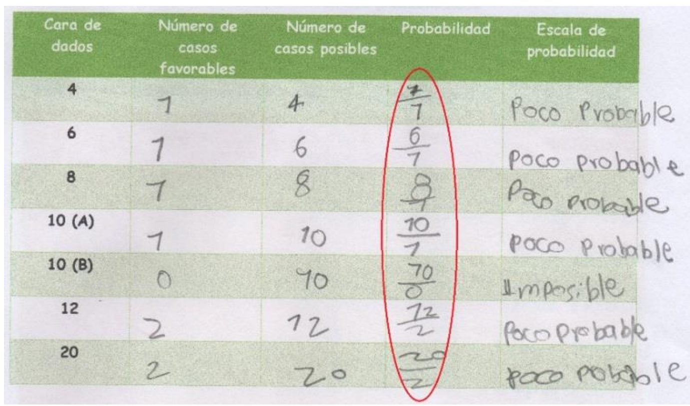


Cara de dados	Número de casos favorables	Número de casos posibles	Probabilidad	Escala de probabilidad
4	1	4	1/4	Poco Prodadle
6	1	6	1/6	Poco [illegible]dle
8	1	8	1/8	Poco Plodadle
10 (A)	1	10	1/10	Poco Plodadle
10 (B)	0	10	0/10	Poco Plodadle
12	2	12	2/12	Poco Plodadle
20	2	20	2/20	Poco Plodadle

Con respecto a la columna del "casos favorables" todos los estudiantes reconocieron correctamente la cantidad de números que terminan en 2.

En la columna de "probabilidad" el estudiante E7 vuelve a confundir, en todos los casos, los términos del cociente, como se muestra en la figura; pero a pesar de eso, reconoce correctamente estos eventos en la escala de probabilidad.

Figura 82**.** Ejemplo 2. Evento: caída número terminado en dos al lanzar dados (E7) Situación 3. Fase III.

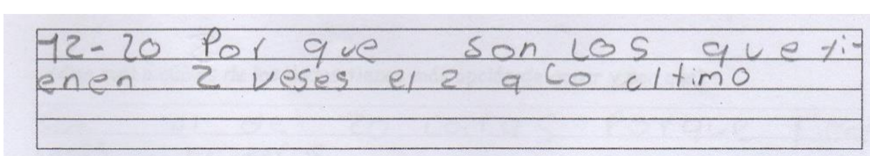


Cara de dados	Número de casos favorables	Número de casos posibles	Probabilidad	Escala de probabilidad
4	1	4	$\frac{4}{1}$	Poco Probable
6	1	6	$\frac{6}{1}$	Poco probable
8	1	8	$\frac{8}{1}$	Poco probable
10 (A)	1	10	$\frac{10}{1}$	Poco Probable
10 (B)	0	10	$\frac{10}{0}$	Imposible
12	2	12	$\frac{12}{2}$	Poco Probable
20	2	20	$\frac{20}{2}$	Poco probable

Los estudiantes E1, E3 y E4 no reconocieron que en el dado 10B era un evento imposible, a pesar de que sabían que el número de casos favorables era 0. El estudiante E5 consideró que en los dados de 12 y 20 caras era muy probable debido a que tenían dos casos favores y este valor era mayor que en los demás dados.

"¿Con cuál o cuáles de los dados tienes más opción de ganar y por qué?"

Figura 83. Ejemplo 1. D. Dados con mayor opción (E3). Situación 3. Fase III.



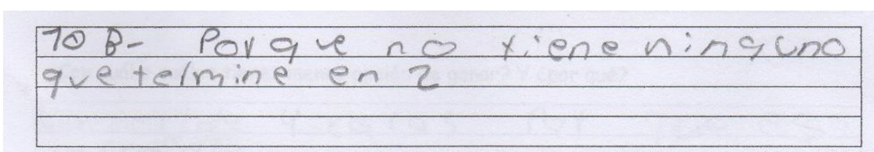
La respuesta del estudiante E3 son los dados de 12 y 20 caras; porque al parecer está asociando que al tener más números de casos favorables, tienen mayor posibilidad; sin tener en cuenta que los casos posibles son diferentes. Los estudiantes E1, E4, E5 y E6 seleccionan el dado de 20 caras con el mismo criterio de su compañero. El estudiante E2 selecciona el dado 10ª porque el contiene el número 2 y el estudiante E7 seleccionó el dado de 4 caras, pero su justificación no fue muy concisa.

Tabla 33. *Justificación de respuestas de los estudiantes. Situación 3. Momento 4D. Fase III.*

	Estudiantes						
	1	2	3	4	5	6	7
¿Con cuál o cuáles de los dados tienes más opción de ganar y por qué?	Con el de 20 caras porque es el de más puntaje	El 10 a porque el número de dados está el dos	12-20 porque son los que tiene 2 veces el 2 a lo ultimo	El de 20 porque tiene números mayores	20 porque 2 sobre 20 todos son los más mayores	20 porque es muy probable	Escogería el de 4 caras porque caería fácil

"¿Con cuál o cuáles tiene menos opción de ganar? Y ¿por qué?"

Figura 84. Ejemplo 1. D. Dados con menor opción (E3). Situación 3. Fase III.



Los estudiantes E2, E3, E5 y E7 seleccionan el dado 10B justificando que este dado no contiene números terminados en 2. Los estudiantes E1, E4 y E6 eligieron el dado de 4 caras, basados en que éste tiene menos caras que los demás. El estudiante E6 selecciona el dado 4 pero no justifica su respuesta adecuadamente.

Tabla 34. *Justificación de respuestas de los estudiantes. Situación 3. Momento 4D. Fase III.*

	Estudiantes						
	1	2	3	4	5	6	7
¿Con cuál o cuáles tienes menos opción de ganar? Y ¿por qué?	Con el de 4 caras porque tiene menos puntajes.	El 10 b porque el número de dados no hay ningún numero terminado en 2	10 b porque no tiene ningún numero terminado en 2	El dado de 4 caras porque tiene números más pequeños	10 b porque es el menor de todos	4 porque es poco probable	No escogería el 10 b porque no puede ganar fácil

Aunque los resultados demuestren que los niños no dieron siempre respuestas correctas, es importante resaltar que se evidencia que hacen uso del vocabulario probabilístico, aunque todavía con imprecisiones y fallas, y que empiezan a demostrar que están reestructurando sus representaciones mentales del concepto. Todavía no hay un uso adecuado, pero al menos demuestran que se aproximan a ello y que están cambiando sus ideas intuitivas hacia una construcción más formal de concepto de probabilidad. Esto seguramente podrá irse desarrollando aún más si se continúan realizando actividades como las planteadas. Además hay que tener en cuenta que en estas últimas actividades se requería que los estudiantes ya tuvieran otros conocimientos matemáticos propios de su nivel escolar (por ejemplo el concepto de múltiplo), y en muchos de los casos se evidenciaron falencias en estos aspectos.

6.3.4. Situación 4: Semana de fiestas.

En esta última situación se tiene como objetivo que los estudiantes comprendan la probabilidad de obtener ciertos resultados en situaciones sencillas y utilicen diferentes formas de representación para este concepto (como razón y porcentaje). Para esto, se sigue con la dinámica de las fiestas del colegio (Anexo 7). Esta situación se dividió en dos momentos. En el primer momento, se realizaron tres actividades, en las cuáles se debe encontrar la probabilidad de algunos eventos y calcular el porcentaje de ocurrencia, lo que a su vez servirá de apoyo para tomar la decisión de escoger el evento que tiene más opción de ocurrencia. En el segundo momento, se pretendía que el estudiante identifique el número de casos favorables cuando se conoce la probabilidad y el número de casos posibles. Para estas actividades se buscaba que el denominador (casos posibles) fuera 10 para facilitar el proceso de división de decimales, puesto que los estudiantes tenían algunas dificultades con ello y no estaba dentro del propósito de esta investigación trabajar este concepto. Las actividades desarrolladas en esta situación se diseñaron para responder a la categoría 3: “regla de Laplace”.

Momento 1.

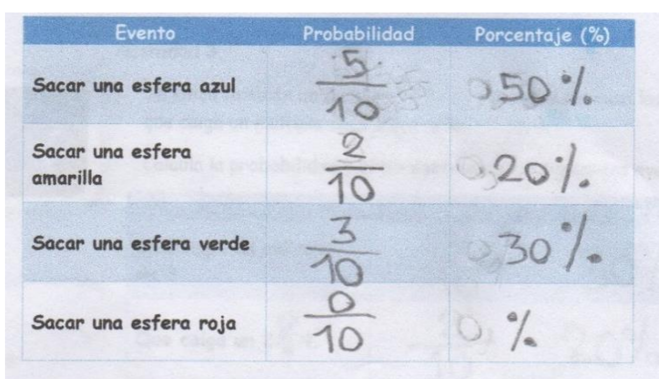
“Durante esta semana se van a realizar diversas actividades, entre ellos juegos aleatorios, vas analizar algunos de los juegos que se están desarrollando en los cuales debes calcular la probabilidad y el porcentaje de ocurrencia de algunos eventos”.

Actividad 1.

“Esta actividad consiste en sacar una esfera del color deseado. Se sabe que dentro de la bolsa hay 10 esferas de diferentes colores así: 5 esferas de color azul, 3 verdes y 2 amarillas. Calcula la probabilidad y el porcentaje de los siguientes eventos”.

A continuación, el ejemplo de una respuesta de un estudiante a esta actividad:

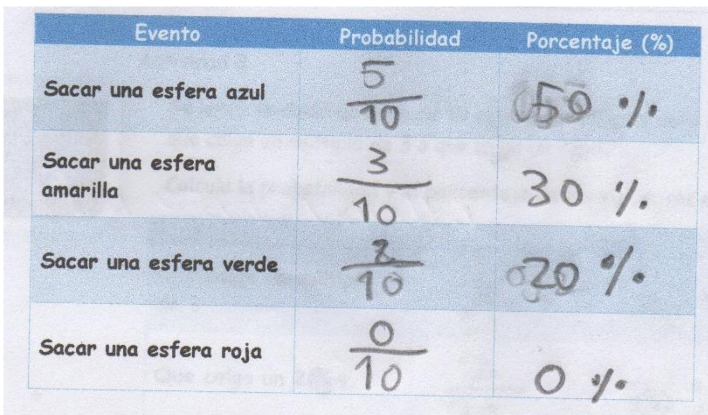
Figura 85. Ejemplo 1. Probabilidad esferas (E6). Situación 4. Fase III.



Evento	Probabilidad	Porcentaje (%)
Sacar una esfera azul	$\frac{5}{10}$	50 %
Sacar una esfera amarilla	$\frac{2}{10}$	20 %
Sacar una esfera verde	$\frac{3}{10}$	30 %
Sacar una esfera roja	$\frac{0}{10}$	%

Analizando la respuesta de los estudiantes el 71% de ellos respondieron correctamente, como se ve en la figura anterior. El 29% de los estudiantes cometieron una equivocación, como se muestra en la siguiente figura. Al preguntarles el motivo de este error, ellos informan que habían seguido el orden del enunciado (color azul, verde, amarillo). Esto implica que la equivocación se debió más a procesos atencionales de los estudiantes que a su comprensión del concepto.

Figura 86. Ejemplo 2. Probabilidad esferas (E5). Situación 4. Fase III Situación 4.



Evento	Probabilidad	Porcentaje (%)
Sacar una esfera azul	5/10	050 %
Sacar una esfera amarilla	3/10	30 %
Sacar una esfera verde	2/10	020 %
Sacar una esfera roja	0/10	0 %

Después de realizada la actividad se hacía la siguiente pregunta: “¿Cuál de los eventos tiene más opción de ocurrencia?”. Estos son dos ejemplos de respuesta:

Figura 87. Ejemplo 1. Eventos con mayor probabilidad (E6). Situación 4. Fase III.

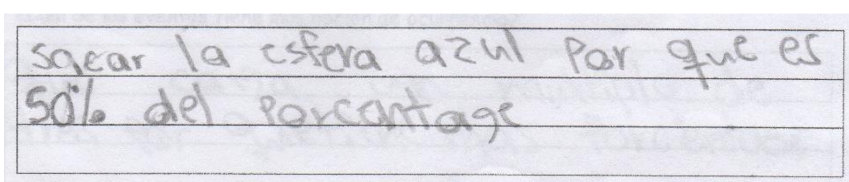
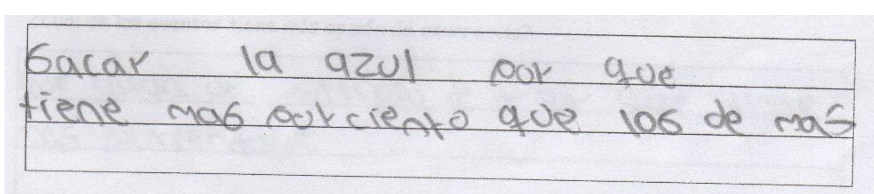


Figura 88. Ejemplo 2. Eventos con mayor probabilidad con esferas (E5). Situación 4. Fase III.



En la tabla siguiente se hace un consolidado general de las respuestas dadas por los estudiantes a esta pregunta, dónde se puede apreciar que el evento que tiene más probabilidad de ocurrencia es sacar una esfera azul. Las respuestas de los estudiantes demuestran una mayor estructura comparada con las justificaciones de las sesiones anteriores. Esto significa que los estudiantes están demostrando avances en la construcción del concepto de probabilidad a través de la apropiación del lenguaje probabilístico.

Tabla 35. *Justificación de las respuestas de los estudiantes. Situación 4. Momento 1. Actividad 1. Fase III.*

Estudiante						
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
La esfera azul porque puede caer mas	Azul porque tiene más opción de ganar	Sacar la esfera azul porque hay esferas	Sacar la esfera azul porque tiene más fichas azules	Sacar la azul porque tiene más porciento que los demás	Sacar la esfera azul porque es 50% del porcentaje	La esfera azul porque tiene 50% de caer

Actividad 2.

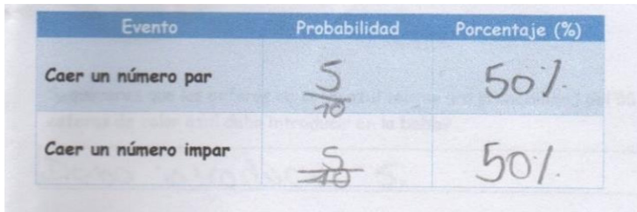
"Esta actividad consiste en lanzar un dado de 10 caras, el jugador puede escoger una de las siguientes opciones: que caiga un número par o que caiga un número impar.

Calcula la probabilidad y el porcentaje de los siguientes eventos".

Figura 89. Imagen. Actividad 2. Momento 1. Situación 4. Fase III

A modo de ejemplo, a continuación, se presenta la respuesta de un estudiante a algunos de los eventos:

Figura 90. Ejemplo 1. Número par o impar (E7). Situación 4. Fase III.

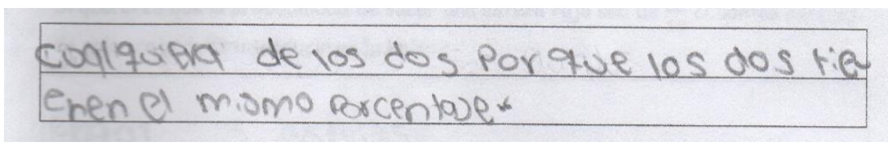


Evento	Probabilidad	Porcentaje (%)
Caer un número par	5/10	50%
Caer un número impar	5/10	50%

En los resultados de esta actividad se aprecia que el 100% de los estudiantes la realizaron correctamente.

Aquí también se realizó la pregunta "¿Cuál de los eventos tiene más opción de ocurrencia?"; y este es un ejemplo de respuesta:

Figura 91. Ejemplo 1. Eventos con mayor probabilidad con dado 10 caras. (E7).Situación 4. Fase III.



cualquiera de los dos porque los dos tie
enen el mismo porcentaje

En la tabla siguiente se encuentra la respuesta de todos los estudiantes. En las respuestas dadas se observa que el 86% de los ellos detectaron que los dos eventos tienen igual probabilidad; algunos justificaron utilizando porcentajes, otros con el término "igualmente probable"; lo que demuestra de nuevo un mejoramiento en la apropiación del lenguaje probabilístico. Sólo uno de los estudiantes E3 (14%) no pudo realizar una justificación correcta de su respuesta; en la indagación demostró comprensión de que en los dos eventos existía igual probabilidad.

Tabla 36. *Justificación de las respuestas de los estudiantes. Situación 4. Momento 1. Actividad 2. Fase III.*

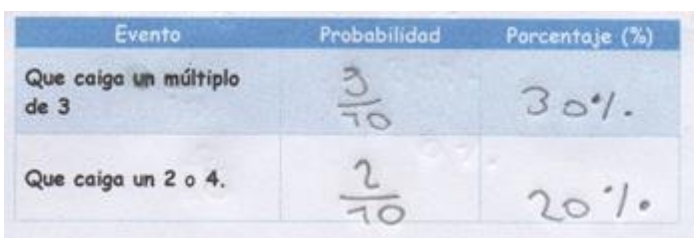
Estudiante						
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
La dos tiene igual porcentaje	El par e impar porque el porcentaje es igual	Que caiga o no caiga	Los dos porque tiene igual porcentaje	Los dos porque los dos tiene el mismo porcentaje	Los dos porque son igualmente probable	Cualquiera de los dos, porque los dos tiene el mismo porcentaje

Actividad 3.

"Se lanza también un dado de 10 caras, pero en este caso las opciones son: que caiga un múltiplo de 3 o que caiga un 2 y 4. Calcula la probabilidad y el porcentaje de los siguientes eventos"

En esta actividad el 86% de los estudiantes contestaron correctamente, demostrando mayor comprensión cuando el evento es compuesto.

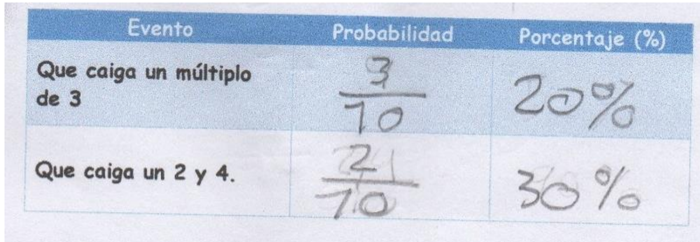
Figura 92. Ejemplo 1. Múltiplo de 3, 2 o 4 (E3). Situación 4. Fase III.



Evento	Probabilidad	Porcentaje (%)
Que caiga un múltiplo de 3	$\frac{3}{10}$	30%
Que caiga un 2 o 4.	$\frac{2}{10}$	20%

El estudiante (E3) que corresponde al 14% tuvo un error al colocar el porcentaje; él manifiesta que como dividió primero $\frac{2}{10}$ (por ser dos más pequeño que el tres) "lo coloqué de primero y luego al hacer la otra división la coloqué donde faltaba".

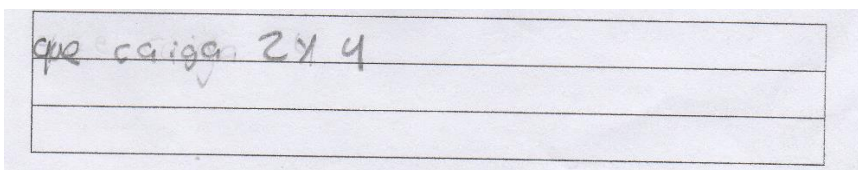
Figura 93. Ejemplo 2. Múltiplo de 3 o 2 o 4 (E3). Situación 4. Fase III.



Evento	Probabilidad	Porcentaje (%)
Que caiga un múltiplo de 3	$\frac{3}{10}$	20%
Que caiga un 2 y 4.	$\frac{21}{10}$	30%

A la pregunta "¿Cuál de los eventos tiene más opción de ocurrencia?". El 86% de los estudiantes justifica su respuesta acertadamente, utilizando un lenguaje más apropiado. El E3 justifica su respuesta con base al porcentaje, al tener un error en esa respuesta hace que responda erradamente en su argumento.

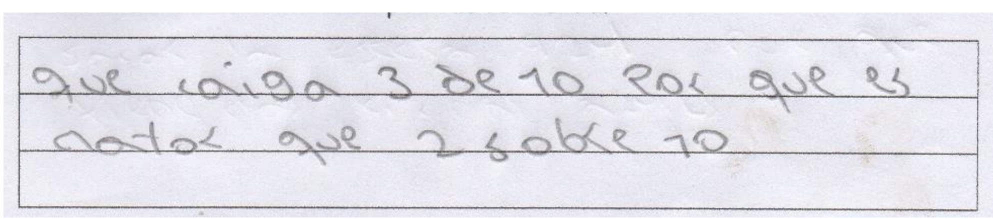
Figura 94. Ejemplo 1. Eventos mayor probabilidad múltiplo de 3 o 2 o 4 (E3).Situación 4. Fase III.



que caiga 2 y 4

Y Este es el ejemplo de una respuesta correcta.

Figura 95. Ejemplo 2. Eventos mayor probabilidad múltiplo de 3 o 2 o 4 (E4).Situación 4. Fase III.



que caiga 3 de 10 por que es
mayor que 2 sobre 10

En la tabla siguiente se pueden observar las justificaciones que dieron los estudiantes a esta pregunta.

Tabla 37. *Justificación de las respuestas de los estudiantes. Situación 4. Momento 1. Actividad 3. Fase III.*

Estudiante						
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Que caiga de 3 porque tiene mayor porcentaje	Que caiga un múltiplo de 3 porque tiene más opción de ganar	Que caiga 2 y 4 tiene mayor porcentaje	Que caiga el 3 de 10 porque es mayor que 2 de 10	Que caiga un múltiplo de 3 porque tiene más porcentaje	Que caiga un múltiplo de tres que tiene más porcentaje	El múltiplo de 3 porque tiene más porcentaje

Momento 2.

"Te toco cuidar una de las mesas de juego, el juego de las esferas; sabes que dentro de la bolsa debe introducir 10 esferas, pero puedes escoger los colores. Si quieres que las esferas de color azul tengan una probabilidad del 50% ¿Cuántas esferas de color azul debo introducir en la bolsa? Si quieres que las esferas de color azul tengan una probabilidad del 50% ¿Cuántas esferas de color azul debo introducir en la bolsa?"

Esta respuesta fue contestada correctamente por el 86% de los estudiantes, presentándose un error en el estudiante E3. La respuesta dada por ellos se presenta en la tabla siguiente:

Tabla 38. *Respuesta de los estudiantes. Situación 4. Momento 2. Pregunta 1. Fase III.*

Estudiante						
1	2	3	4	5	6	7
5 esferas	5 esferas azules	10 %	5 esferas	5 esferas de color azul	5 esferas de color azul	Debo introducir 5

"Si quieres que la probabilidad de sacar una esfera roja sea de $\frac{3}{10}$ ¿Cuántas esferas de color rojo debo introducir en la bolsa?"

Esta pregunta fue contestada correctamente por el 86% de los estudiantes, se volvió a presentar un error en el estudiante E3. La respuesta dada por ellos se presenta en la tabla siguiente.

Tabla 39. *Respuesta de los estudiantes. Situación 4. Momento 2. Pregunta 2. Fase III.*

Estudiante						
1	2	3	4	5	6	7
3 esferas	3 esferas rojas	$\frac{3}{10}$	3 esferas	3 esferas rojas	3 esferas rojas	echar tres esferas

"Si quieres que la probabilidad de sacar una esfera amarilla sea de $\frac{7}{10}$ ¿Cuántas esferas de color amarillo debo introducir en la bolsa?"

Esta respuesta fue contestada correctamente por el 86% de los estudiantes, se vuelve recurrente el error en el estudiante E3. La respuesta dada por ellos se presenta en la tabla siguiente.

Tabla 40. *Respuesta de los estudiantes. Situación 4. Momento 2. Pregunta 3. Fase III.*

Estudiante						
1	2	3	4	5	6	7
7 esferas	7 esferas amarillas	$\frac{7}{10}$	7 esferas	7 esferas amarillas	7 amarillas	Debo introducir 7

Al preguntarle al estudiante E3 sobre sus respuestas afirma que no había tenido claro lo que había que hacer, que colocó el valor que se le estaba dando. Se observa que en este día su atención estaba dispersa, debido a un problema familiar.

6.4. Fase IV: Análisis a posteriori.

En la fase IV se realiza una contrastación de los resultados de la fase II y la fase III, con el objetivo de identificar los cambios que se produjeron en la construcción del concepto. En esta contrastación se tiene en cuenta los resultados de la fase III así como los resultados obtenidos de una nueva aplicación de la situación adidáctica utilizada en la fase II.

A continuación se presenta la contrastación de los resultados, teniendo en cuenta las categorías elaboradas previamente en el análisis cognitivo (tabla 4) y los resultados en el análisis a priori y a posteriori de estas categorías.

Tabla 41. *Contrastación de categorías para el análisis del concepto de probabilidad.*

Contrastación categorías para el análisis de concepto de probabilidad		
Categoría	Análisis a priori	Análisis a posteriori
Concepto de aleatoriedad.	Los estudiantes no identifican la diferencia entre los eventos aleatorios y no aleatorios (deterministas). Aunque tienen una idea intuitiva de la probabilidad que, según Fischbein (1975), se desarrolla antes de los siete años y es producto de las experiencias con situaciones de este tipo.	Los niños identifican la diferencia entre un evento aleatorio y un evento no aleatorio (determinista), pueden reconocer las características de cada uno y justificar las razones por las cuáles se diferencian.
Lenguaje probabilístico.	Los estudiantes aún no han desarrollado un lenguaje probabilístico que incluya palabras como “imposible”, “poco probable”, “igualmente probable”, “muy probable” y “seguro”. Utilizan el término probabilidad de manera relativa e imprecisa, seguramente porque es una palabra utilizada en su cotidianidad, pero no comprenden su significado matemático.	Los estudiantes lograron comprender algunos conceptos del lenguaje probabilístico y utilizarlos en diferentes contextos.
Regla de Laplace.	Los niños desconocen la regla de Laplace, es decir, no pueden representar la probabilidad utilizando una razón o un porcentaje.	Los estudiantes logran representar como razón y como porcentaje diferentes situaciones probabilísticas. Los estudiantes manejan diferentes representaciones del concepto de probabilidad (razón y porcentaje), creando una relación con el lenguaje probabilístico.

Teniendo en cuenta que la fase III se ha planeado con base en los resultados obtenidos en la situación adidáctica; una vez terminada la fase de experimentación se aplicó de nuevo esta situación a los estudiantes, para identificar si el proceso de enseñanza había logrado cambios en el concepto de probabilidad. A continuación se presenta un análisis comparativo de los resultados de la situación adidáctica en los dos momentos de aplicación: antes y después de la fase de experimentación. (En el anexo 8 se encuentran los resultados a posteriori).

6.4.1. Categoría 1: Concepto de aleatoriedad.

En el análisis a priori de esta categoría se encontró que los estudiantes aún no identifican las diferencias entre eventos aleatorios y no aleatorios (deterministas) porque no hay un desarrollo formal de los términos; aunque existen algunas ideas intuitivas sobre su relación con los juegos, probablemente asociadas a sus experiencias cotidianas. (Fischbein, 1975).

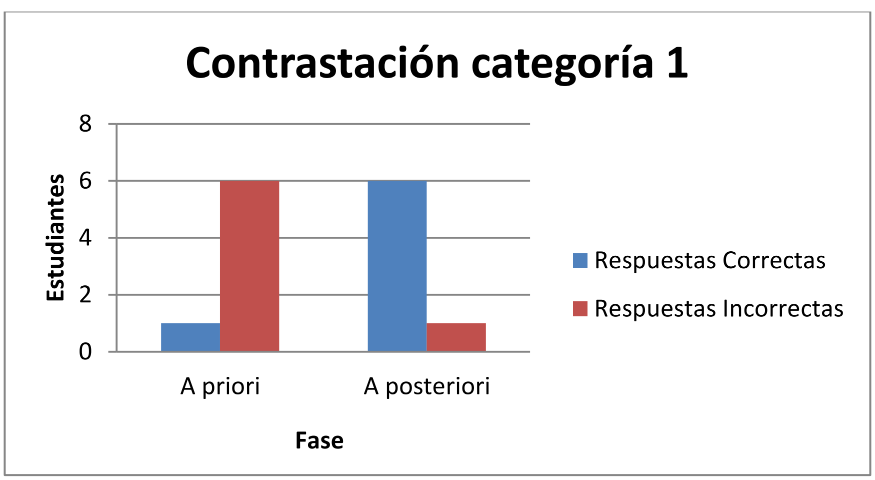
Por otra parte, los resultados en esta categoría en el análisis a posteriori demuestran que hay un mayor desarrollo del concepto de aleatoriedad porque los estudiantes identificaban con mayor claridad las diferencias entre los dos tipos de eventos (aleatorios y no aleatorios) y podían justificar su respuesta. Mientras que en el análisis a priori sólo 1 de los 7 estudiantes demostró que hacía una diferenciación entre los eventos, en el análisis a posteriori 6 de los 7 estudiantes pudieron hacerlo correctamente. Aquí el ejemplo de la respuesta del mismo estudiante (E7) en los dos casos:

Figura 96. Ejemplo 1. Contrastación respuesta estudiante E7. Categoría 1. Fase IV.

Respuesta Análisis a priori
el juego 1 no es aleatorio por que No es algo divertido, el juego 2 es aleatorio Por que el que no sabe los Pares o impares hay puede aprender el juego 3 es aleatorio Por que uno puede divertise un rato.
Respuesta Análisis a posteriori
la actividad 1 es si aleatorio Por que nosotros no vamos ha saber que color va a caer. la actividad 2 es si aleatorio Por que no sabemos si va a caer par o impar. la actividad 3 no aleatoria por que si yo cuento las frases de la cancion yo puedo contar a mis compañeros y se que va a ser esa persona.

En la figura se ilustran los resultados generales del grupo.

Figura 97. Resultados contrastación categoría 1. Fase IV.

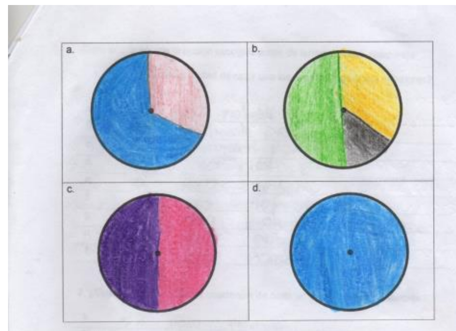


Estos resultados demuestran que las actividades realizadas en la fase de experimentación facilitaron que los estudiantes avanzaran en la construcción del concepto de probabilidad gracias a la utilización de material manipulativo y al trabajo en grupo; lo que permitió a los estudiantes acercarse al concepto, partiendo de sus conocimientos previos y construyendo colectivamente. En las actividades orientadas a enseñar a los niños a diferenciar los eventos aleatorios y no aleatorios (determinísticos) se utilizaron varias formas de trabajo en el aula: trabajo individual, pequeños grupos y grupo general. Esto les permitió ser más partícipes y activos en la construcción de su propio conocimiento. Además, estas actividades fueron diseñadas de acuerdo con los resultados de las investigaciones de Batanero (2013) que proponen que es necesario que los niños aprendan explícitamente a diferenciar las situaciones aleatorias y deterministas para poder desarrollar otros conceptos estadísticos. Asimismo, esta misma autora, propone que para lograr este objetivo se deben utilizar situaciones de juego; tal como se hizo en la fase de experimentación de esta investigación.

6.4.2. Categoría 2: Lenguaje probabilístico.

Al igual que los resultados obtenidos en la categoría 1, en la fase a priori los estudiantes demostraron tener algunos conocimientos previos que les permitían ejecutar algunas actividades adecuadamente, pero no podían justificar porque. De nuevo los resultados demuestran cierto conocimiento sobre el tema, pero sin una claridad conceptual apropiada. Por otro lado, los resultados del análisis a posteriori demuestran que los estudiantes tuvieron menos errores en el desarrollo de la actividad y pudieron justificar sus respuestas utilizando un lenguaje probabilístico. Según Cañizares (1997) otro de los componentes del razonamiento probabilístico tiene que ver con el uso del lenguaje. Es importante que los estudiantes utilicen adecuadamente términos como imposible o seguro que son utilizados en la cotidianidad de manera imprecisa y, por ello, corresponde a la escuela enseñar apropiadamente su uso en el contexto estadístico. Por esta razón, dentro de la fase de experimentación se presentaron a los estudiantes situaciones en las que debían reconocer y apropiarse de cada uno de estos términos, asimismo, debían saber identificarlos en diferentes situaciones y ejemplificarlos. Aquí se presentan las respuestas del estudiante 2 (E2) que muestran como después de participar en las actividades de enseñanza pudo realizar la actividad de manera más efectiva cumpliendo con las condiciones para la construcción de la ruleta.

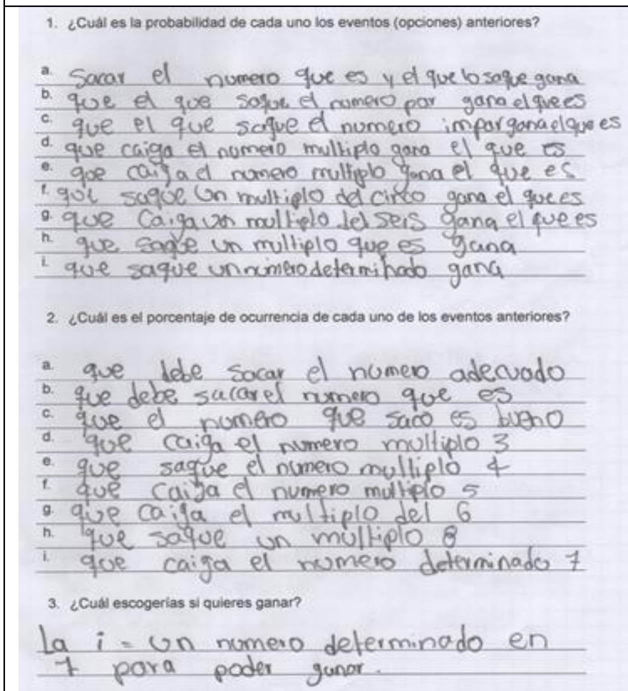
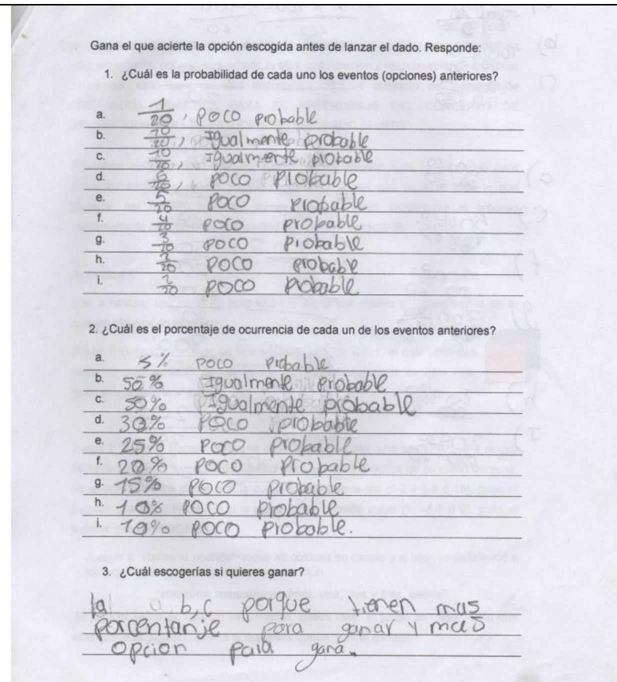
Figura 98. Ejemplo 1. Contrastación respuesta estudiante E2. Categoría 2. Fase IV.

<table>
<tr><td>Respuesta Análisis a priori</td><td>Respuesta análisis a posteriori</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Condiciones de las ruletas:
a. Dos colores, azul y rojo, que el rojo sea muy poco probable.
b. Tres colores negro, amarillo y verde, que el verde sea igualmente probable, y el negro poco probable.
c. Una ruleta donde el rojo sea imposible.
d. Una ruleta donde el azul sea seguro.</td></tr>
</table>

6.4.3. Categoría 3: Regla de Laplace.

La regla de Laplace propone que la probabilidad de un suceso es igual al cociente entre el número de casos favorables y el número de casos posibles, siempre que todos los sucesos sean equiprobables y el espacio muestral asociado al experimento sea finito (Mohamed, 2012). En el análisis a priori de esta categoría se encuentra que ninguno de los 7 estudiantes pudo representar la probabilidad como razón ni como porcentaje. Esta situación se presenta porque según los niños desconocían estas formas de representación de probabilidades. En el análisis a posteriori de esta categoría, los estudiantes lograron avanzar en este proceso. Tal como lo muestra el siguiente ejemplo:

Figura 99. Ejemplo 1. Contrastación respuesta estudiante E2. Categoría 3. Fase IV

<table>
<tr><th>Respuesta análisis a priori</th><th>Respuesta análisis a posteriori</th></tr>
<tr><td>
1. ¿Cuál es la probabilidad de cada uno los eventos (opciones) anteriores?
a. Sacar el numero que es y el que lo saque gana
b. que el que saque el numero par gana el que es
c. que el que saque el numero impar gana el que es
d. que caiga el numero multiplo gana el que es
e. que caiga el numero multiplo gana el que es
f. que saque un multiplo del cinco gana el que es
g. que caiga un multiplo del seis gana el que es
h. que saque un multiplo que es gana
i. que saque un número determinado gana
2. ¿Cuál es el porcentaje de ocurrencia de cada uno de los eventos anteriores?
a. que debe sacar el numero adecuado
b. que debe sacar el numero que es
c. que el numero que saco es bueno
d. que caiga el numero multiplo 3
e. que saque el numero multiplo 4
f. que caiga el numero multiplo 5
g. que caiga el multiplo del 6
h. que saque un multiplo 8
i. que caiga el numero determinado 7
3. ¿Cuál escogerías si quieres ganar?
la i = un numero determinado en 7 para poder ganar.</td><td>
Gana el que acierte la opción escogida antes de lanzar el dado. Responde:
1. ¿Cuál es la probabilidad de cada uno los eventos (opciones) anteriores?
a. 1/20, poco probable
b. 10/20, igualmente probable
c. 10/20, igualmente probable
d. 6/20, poco probable
e. 5/20 poco probable
f. 4/20 poco probable
g. 3/20 poco probable
h. 2/20 poco probable
i. 2/20 poco probable
2. ¿Cuál es el porcentaje de ocurrencia de cada un de los eventos anteriores?
a. 5% poco probable
b. 50% igualmente probable
c. 50% igualmente probable
d. 30% poco probable
e. 25% poco probable
f. 20% poco probable
g. 15% poco probable
h. 10% poco probable
i. 10% poco probable.
3. ¿Cuál escogerías si quieres ganar?
la b, c porque tienen mas porcentaje para ganar y mas opcion para ganá.</td></tr>
</table>

Según Gómez, Ortiz, Batanero y Contreras (2013), un elemento fundamental en la construcción del conocimiento matemático tiene que ver con el uso del lenguaje propio de esta disciplina. Es importante que los estudiantes desarrollen el lenguaje numérico porque es una de las formas de representación más habituales de las matemáticas. Y es tarea del docente buscar estrategias para que los estudiantes progresen del lenguaje cotidiano a lenguajes matemáticos más avanzados que le permitan identificar los lenguajes más técnicos de la probabilidad. Por ello, dentro de esta investigación, se consideró fundamental que en la última situación de la fase de experimentación los estudiantes conocieran diferentes maneras de representar la probabilidad (como razón y como porcentaje).

En conclusión, se puede plantear que las actividades implementadas durante la fase de experimentación contribuyeron al desarrollo del concepto de probabilidad en los estudiantes. Esto demuestra que para enseñar a los estudiantes un concepto se debe hacer un riguroso análisis del mismo, identificando los elementos necesarios para que los niños puedan construir este conocimiento de manera apropiada. En la mayoría de los casos, la enseñanza tradicional se limita a explicar a los estudiantes un contenido, pero no tiene en cuenta sus conceptos previos, su proceso de construcción de conocimiento, la construcción conjunta de aprendizajes ni sus experiencias. En esta investigación se plantearon actividades que integraban las teorías sobre cómo se construye el concepto y los conocimientos y experiencias de los estudiantes, de ahí que los resultados demuestran un cambio en el concepto.

Otro elemento importante dentro de la ingeniería didáctica tiene que ver con la institucionalización de los saberes. De acuerdo con Brousseau (2007) la institucionalización se presenta cuando el docente valora que el estudiante puede realizar aquello que esperaba de él, es decir, que tan cercano está su nuevo conocimiento del saber científicamente institucionalizado. En el caso de esta investigación, los estudiantes demostraron un acercamiento al concepto de probabilidad, puesto que, durante las situaciones en la fase experimentación, demostraban mayor comprensión de la diferencia entre los eventos aleatorios y no aleatorios (deterministas) y podían ejemplificarlos; igualmente fue más preciso el uso del lenguaje probabilístico y se relacionaron con algunas de las representaciones de este concepto (razón y porcentaje).

7. Conclusiones y recomendaciones

A continuación se presentan las conclusiones de este trabajo cuyo objetivo era elevar los niveles de aprendizaje del pensamiento aleatorio en los estudiantes de grado quinto a través de la implementación de la ingeniería didáctica. Además se mencionan algunas recomendaciones que se derivan de los resultados y que pueden ser aportes para los docentes o investigadores interesados en este campo.

1. *Análisis epistemológico del concepto de probabilidad.* En este sentido, de acuerdo a la revisión bibliográfica realizada es importante resaltar que los docentes deben considerar que para la enseñanza del concepto de probabilidad es necesario conocer la epistemología del término para que tengan una mayor claridad de sus implicaciones y no se generen equivocaciones o imprecisiones en los estudiantes.

2. *Análisis didáctico*. Aquí es relevante señalar que corresponde a los docentes diseñar actividades adecuadas para la enseñanza del concepto de probabilidad. De acuerdo a los resultados, los docentes desconocen muchos aspectos del concepto y por ello lo enseñan de acuerdo a sus propias concepciones, lo que ha generado dificultades en los estudiantes (Azcárate, 1995; Cardeñoso, 2001; Mohamed, 2012; Contreras, 2011; Arteaga, 2011; Ortiz, Mohamed, Batanero, Serrano y Rodríguez, 2006).

3. *Análisis cognitivo.* Éste demostró que existen tres categorías que se deben tener en cuenta para la comprensión del concepto de probabilidad: La primera tiene que ver con la aleatoriedad; para poder desarrollar el concepto de probabilidad los estudiantes deben, en primer lugar, aprender a diferenciar entre los eventos aleatorios y no aleatorios (Batanero y Godino, 2004). En segundo lugar, los estudiantes deben apropiarse del lenguaje probabilístico; esto es importante porque se deben precisar términos que en la vida cotidiana se usan de manera general pero que en las matemáticas deben utilizarse adecuadamente. Finalmente, para el desarrollo del concepto de probabilidad es necesario aprender a representar matemáticamente la probabilidad (como razón o como porcentaje) porque esto

acerca a los estudiantes al conocimiento institucionalizado de las matemáticas. Por lo tanto, en las aulas de clase es fundamental que se realicen actividades que incluyan estas tres categorías.

4. *Análisis a priori.* Con esta investigación, se apoyan las ideas de Fischbein, quien en 1975 postula que los niños desarrollan una intuición primaria del concepto de probabilidad aun cuando no han aprendido sobre este concepto en la escuela Sin embargo, es necesario que la educación formal intervenga para convertir estas intuiciones primarias en conocimiento formal, de lo contrario, cuando sean adultos utilizaran explicaciones inadecuadas sobre las situaciones aleatorias, atribuyéndolas, por ejemplo, a la suerte.

5. *Fase de experimentación*. Se puede concluir que la ingeniería didáctica es una herramienta útil para la enseñanza de las matemáticas, puesto que permite realizar un análisis detallado del concepto que se pretende enseñar e identificar los obstáculos que se pueden presentar y a partir de ahí, diseñar situaciones didácticas para el trabajo en el aula. Además permite evaluar los alcances de la intervención y los aprendizajes de los estudiantes.

6. *Análisis a posteriori.* Los resultados de esta investigación permiten afirmar que es necesario reestructurar los procesos de formación de docentes para que puedan conocer y apropiarse de nuevas didácticas que favorecen los aprendizajes de los estudiantes, tal como en este caso. Es necesario que los docentes aprendan a diseñar situaciones didácticas que permitan el desarrollo del concepto de probabilidad, en las que incluyan actividades que faciliten adquirir cada uno de los elementos conceptuales y procedimentales asociados a este objeto matemático. Estas actividades deberían incluir la utilización de material concreto de forma asertiva y las adaptaciones curriculares necesarias. De esta manera se generarían transformaciones en las prácticas de aula de los docentes y aprendizajes que contribuyan a mejorar los resultados de las pruebas internas y externas sobre el pensamiento aleatorio.

Para futuras investigaciones sobre el tema podría trabajarse con un grupo más grande, porque esto permitiría una mayor profundidad en el análisis y establecer relaciones y comparaciones. Aun así, este estudio puede convertirse en un apoyo para los interesados en investigar o en mejorar sus prácticas de enseñanza de las matemáticas. Sin embargo, es necesario que se realicen más investigaciones sobre el tema.

8. Referencias bibliográficas

Arteaga, P. (2011). *Evaluación de conocimientos sobre gráficos estadísticos y conocimientos didácticos de futuros profesores*.(Tesis Doctoral). Universidad de Granada.

Artigue, M.; Douady, R.; Gómez, P. y Moreno, L. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericana.

Azcárate, P. (1995). *El conocimiento profesional de los profesores sobre las nociones de aleatoriedad y probabilidad. Su estudio en el caso de la educación primaria*. (Tesis Doctoral inédita). Universidad de Cádiz.

Batenero, C. (2001). *Didáctica de la estadística.* Granada: Universidad de Granada.

Batanero, C. y Godino, J.D. (2004). *Didáctica de las matemáticas para maestros*. Granada: GAMI.

Batanero, C. y Godino, J. D. (2004). *Matemáticas para maestros.* Granada: GAMI.

Batanero. C. (2013). La comprensión de la probabilidad en los niños: ¿qué podemos aprender de la investigación?. En J. A. Fernandes, P. F. Correia, M. H. Martinho, y F. Viseu, (EDS.) (2013 *III Encuentro de Probabilidades y Estadística en la Escuela.* Centro de investigación en educación Universidad de Minho.

Batanero, C. (2016). Posibilidades y retos de la enseñanza de la probabilidad en la educación primaria. *Actas del 6º Congreso Uruguayo de Educación Matemática*. Montevideo: Curem6.

Blanco, L.J., Cárdenas, J.A. y Caballero, A. (2015). *La Resolución de Problemas de Matemáticas*

en la Formación Inicial de Profesores de Primaria. España: Universidad de Extremadura.

Brouseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática.* Facultad de matemática. Astronomía y física. Universidad Nacional de Córdoba.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas* (primera ed.). (D. Fregona, Trad.) Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Brousseau, G (1999) *Didáctica de las matemáticas. Educación matemática*. México.

Castaño, M. (2013). *Diseño de una unidad didáctica para el desarrollo del pensamiento probabilístico, que favorezca un aprendizaje significativo en los estudiantes de grado 5º 3 de la IE El Pedregal del Municipio de Medellín.* (Tesis Maestría). Recuperado de: http://www.bdigital.unal.edu.co/12321/1/32392859.2014.pdf

Cabriá, S. (1994). *Filosofía de la estadística. Valencia: Servicio de Publicaciones de la Universidad.*

Calderón, D. y León, O. (2012*). La ingeniería didáctica como metodología de investigación del discurso del aula.* Lenguaje y Educación: perspectivas metodológicas y teóricas para su estudio. Libros de los énfasis del doctorado interinstitucional en educación. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá.

Campeón, M. (2016). *Aprendizaje del concepto de función a partir de un proceso de modelación de fenómenos en contexto, mediante una ingeniería didáctica.* Tesis de Maestría. Pereira: UTP

Cañizares, M.J. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias.* (Tesis doctoral). Universidad de Granada.

Cardeñoso, J. M. (2001). *Las creencias y conocimientos de los profesores de primaria andaluces sobre la matemática escolar*. Modelización de concepciones sobre la aleatoriedad y probabilidad. (Tesis Doctoral). Cádiz: Universidad de Cádiz.

Contreras, J. M. (2011). *Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional*. (Tesis Doctoral). Universidad de Granada.

D'Amore Bruno, (2006). *Didáctica de la Matemática* (Primera ed.). Bogotá: Editorial Magisterio.

Fandiño, M. I. (2010). *Múltiples aspectos del aprendizaje de la matemática* (Primera ed.), Bogotá: Colombia Editorial Magisterio.

Fernández, S. (2007). Los inicios de la teoría de la probabilidad. *SUMA.* (55), 7-20.

Fischbein (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children.* Dordrecht: Reidel.

García, M.L., Leal, M. L., Aguilar, I. y López, M.A. (2016). *Pares o Nones*. Recuperado de: www.doslourdes.net/JUEretparesnones.htm

Gómez, E., Ortiz, J.J, Batanero, C. y Contreras, J.M. (2013). El lenguaje de probabilidad en los libros de texto de Educación Primaria. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática.* (35), pp. 77-91.

Green D.R. (1982). *Probability concepts in school pupils aged 11 - 16 years.* (Tesis doctoral). Loughborough University Institutional Repository

Grupo de investigación Crisálida. (2007). Educación estocástica, didáctica de la probabilidad y la estadística. *Cuadernos de investigación. (10).* Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

ICFES (2012). *Cartilla prueba Saber tercero.*

ICFES (2013). *Cartilla prueba Saber grado quinto*.

ICFES (2015). *Cartilla prueba Saber grado tercero*.

ICFES (2016). *Guía de orientación de la prueba Saber*.

ICFES (2016). *Reportes Saber 2016*. Recuperado de: http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/consultaReporteEstablecimiento.jspx (Consultado el 20 de junio de 2016)

Márquez, H. (2011). *Orientaciones para el diseño de situaciones didácticas en matemáticas a estudiantes sordos.* Ministerio de Educación Nacional- Instituto Nacional para sordos. INSOR.

Ministerio de Educación (1998). *Lineamientos curriculares de Matemáticas.* Bogotá: serie lineamientos curriculares.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas* (Primera ed.). (M. d. Nacional, Ed.) Bogotá, Colombia: Imprenta Nacional de Colombia.

Mohamed, N. (2006). *Problemas de comparación de probabilidades. Un estudio experimental con maestros en formación.* (Trabajo de investigación tutelada). Granada: Universidad de Granada.

Mohamed, N. (2012) *Evaluación del conocimiento de los futuros profesores de educación primaria sobre probabilidad*. (Tesis doctoral). Recuperado de: http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/TESISMOHAMED.pdf

Ortiz, J. J., Mohamed, N., Batanero, C., Serrano, L. y Rodríguez, J. D. (2006). Comparación de probabilidades en maestros en formación. En P. Bolea, M. J. Gonzáles y M. Moreno (Eds.), *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 268-276). Huesca: SEIEM. ISBN: 84-8127-156-X.

Perrín, G. (2009), Utilidad de la teoría de las situaciones didácticas para incluir los Fenómenos vinculados a la enseñanza de matemáticas en las clases normales. Recuperado el dia10 de mayo de 2011, de http://www.magisterio.com.co/web/index.php?option=com_content&view=article&id=538:inves

tigacion. En: Santacruz L (2011) Una secuencia didáctica alrededor de las propiedades de algunos cuadriláteros para estudiantes invidentes de grado primero de educación básica.

http://funes.uniandes.edu.co/2549/1/SantacruzUnasecuenciaAsocolme2011.pdf

Piaget, J (1964). *Seis estudios de psicología*. Madrid: Editorial Labor.

Piaget, J., y Inhelder, B. (1951). *La genèse de l'idèe de hasard chez l'enfant.* Paris: Presses Universitaires de France.

Rico, L. (2006). En: D'Amore. *Didáctica de la matemática.* Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio, Universidad de Bologna.

Universidad Nacional Abierta y a Distancia. Recuperado en http://datateca.unad.edu.co/contenidos/301014/Historia_de_la_probabilidad.pdf

Vásquez, C. y Alsina, A. (2014). Enseñanza de la Probabilidad en Educación Primaria. Un Desafío para la Formación Inicial y Continua del Profesorado. *Números.* 85, 5-23.

Vigostky, L. (1978). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores* (primera ed). Barcelona: Grijalbo.